

Chapter8

CHOICE

Hishida kensuke

分析の対象

消費者の需要行動



価格と所得の変化に対する需要の変化

消費者選択の変化

注: 価格 P 、所得 m

仮定

- 消費者は、消費ベクトルに対して、それぞれの欲求に応じて選好順位をつけることができると仮定する。



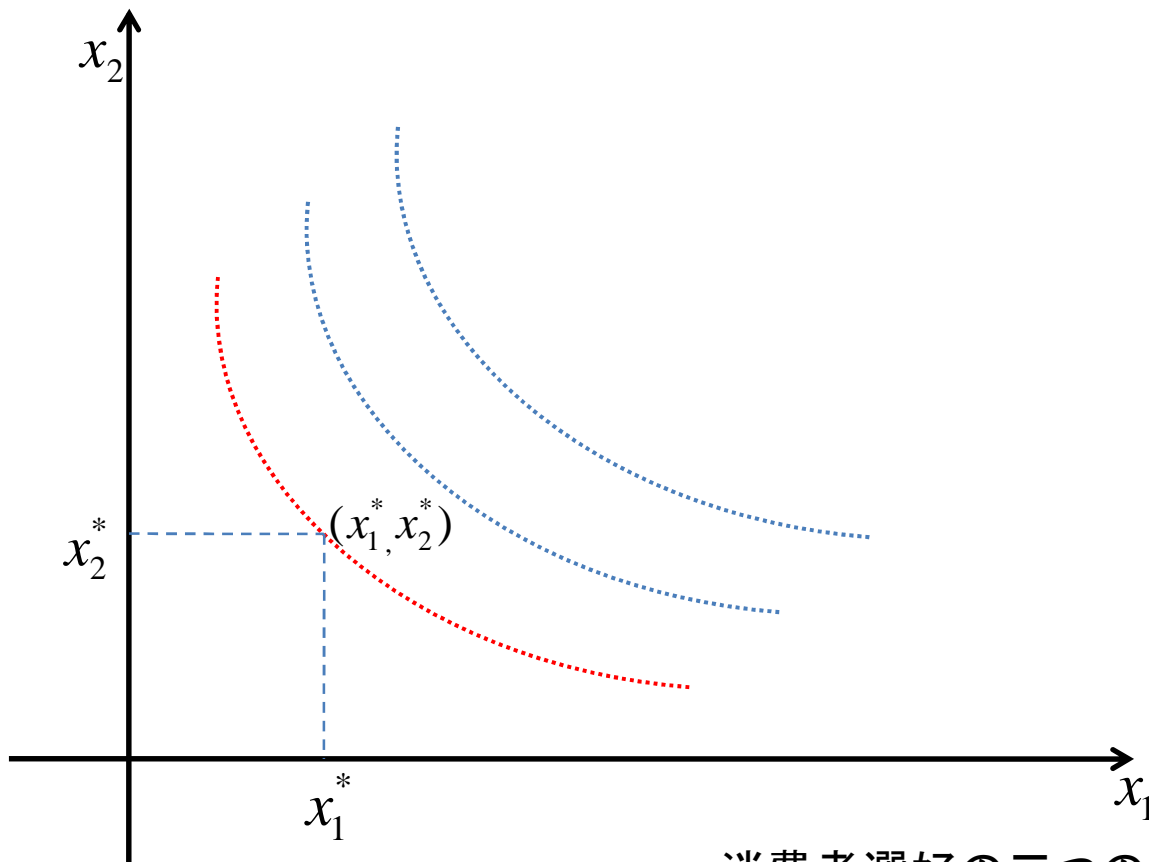
整合性を持たせるために基礎的な仮定を設けている。

- 消費者理論の三つの公理

⇒ 1、完全性 2、反射性 3、推移律

選好関係の記述

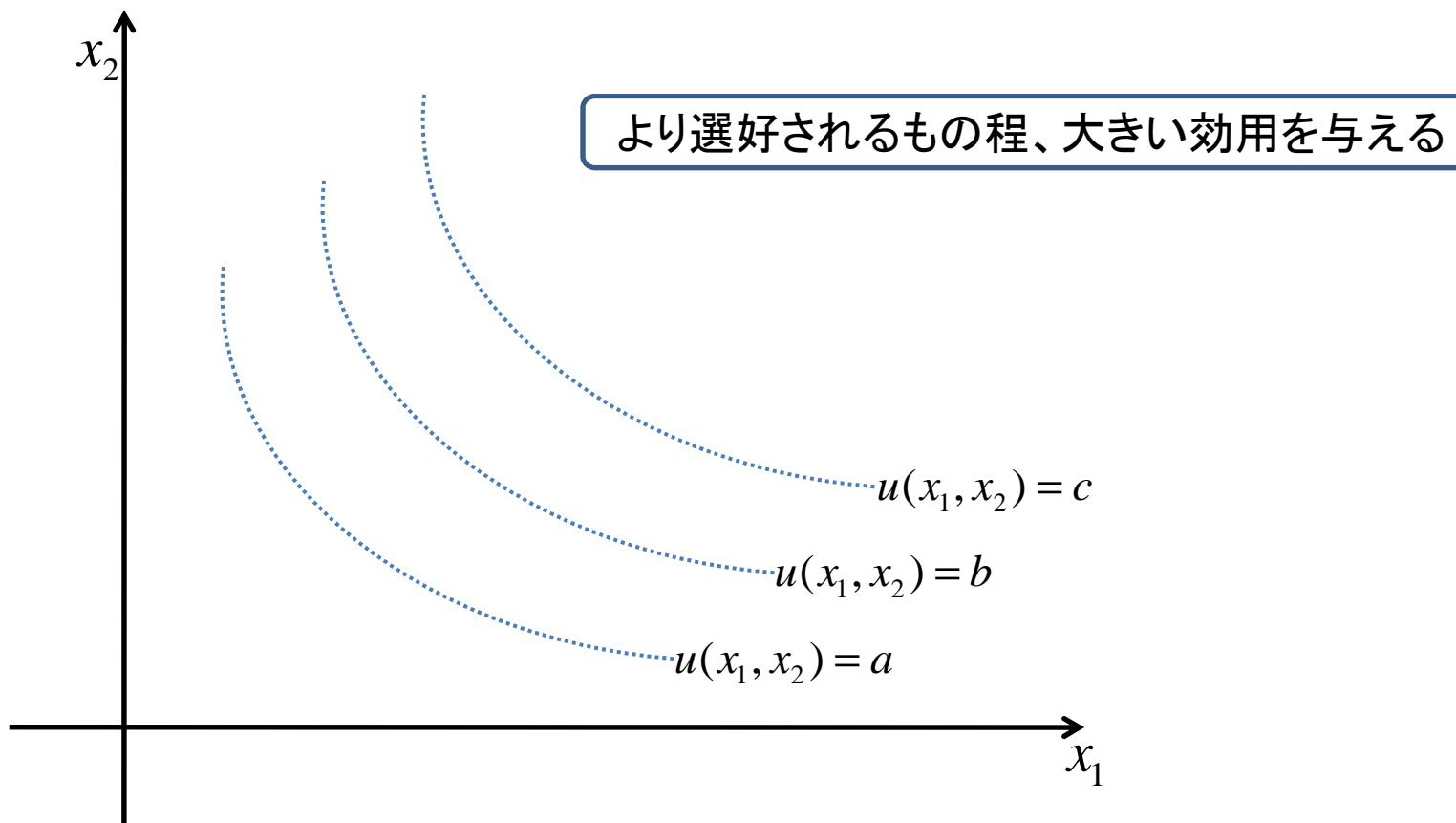
◎無差別曲線群の概念◎



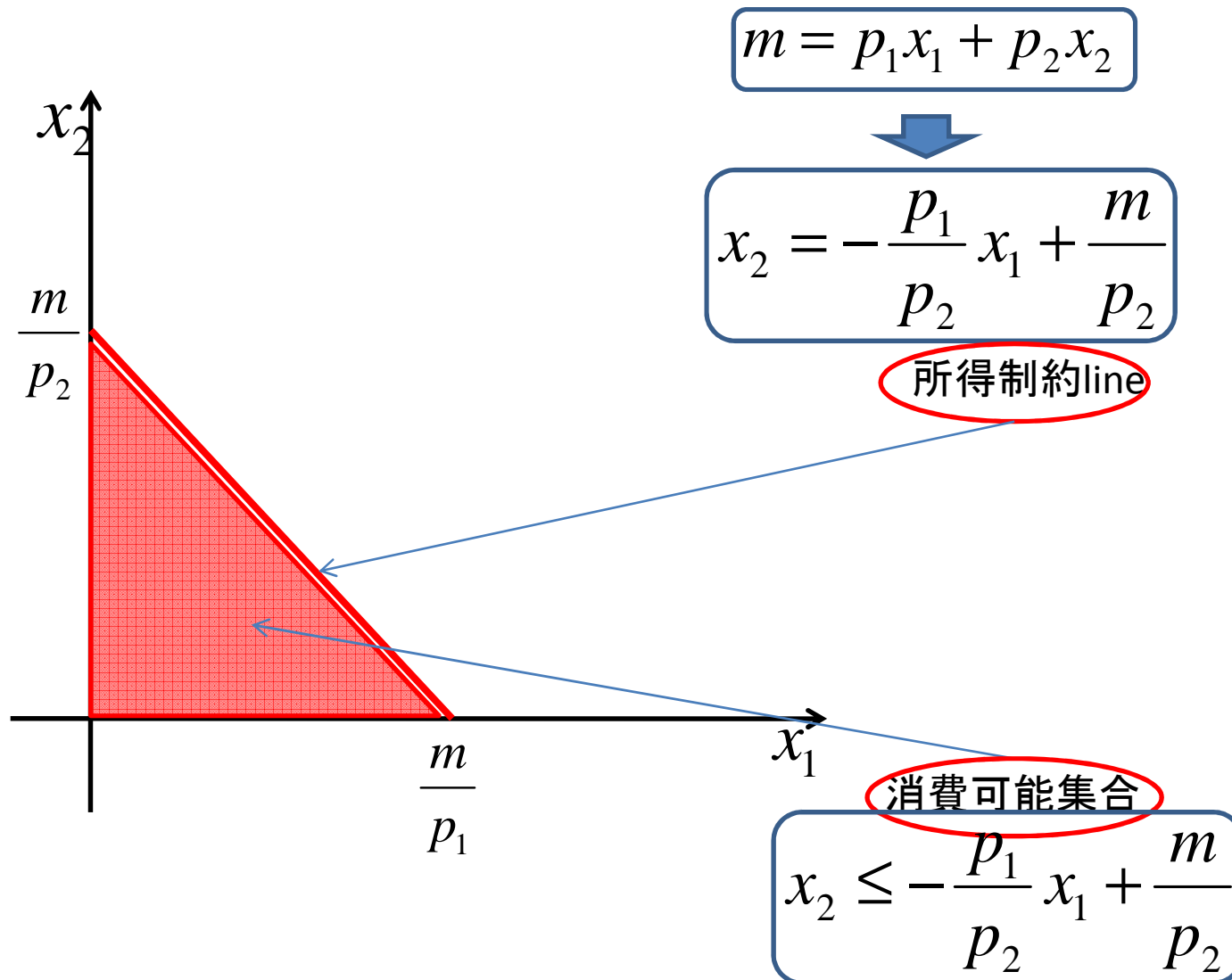
消費者選好の三つの公理を満たす。

効用の概念を導入

$(a < b < c)$

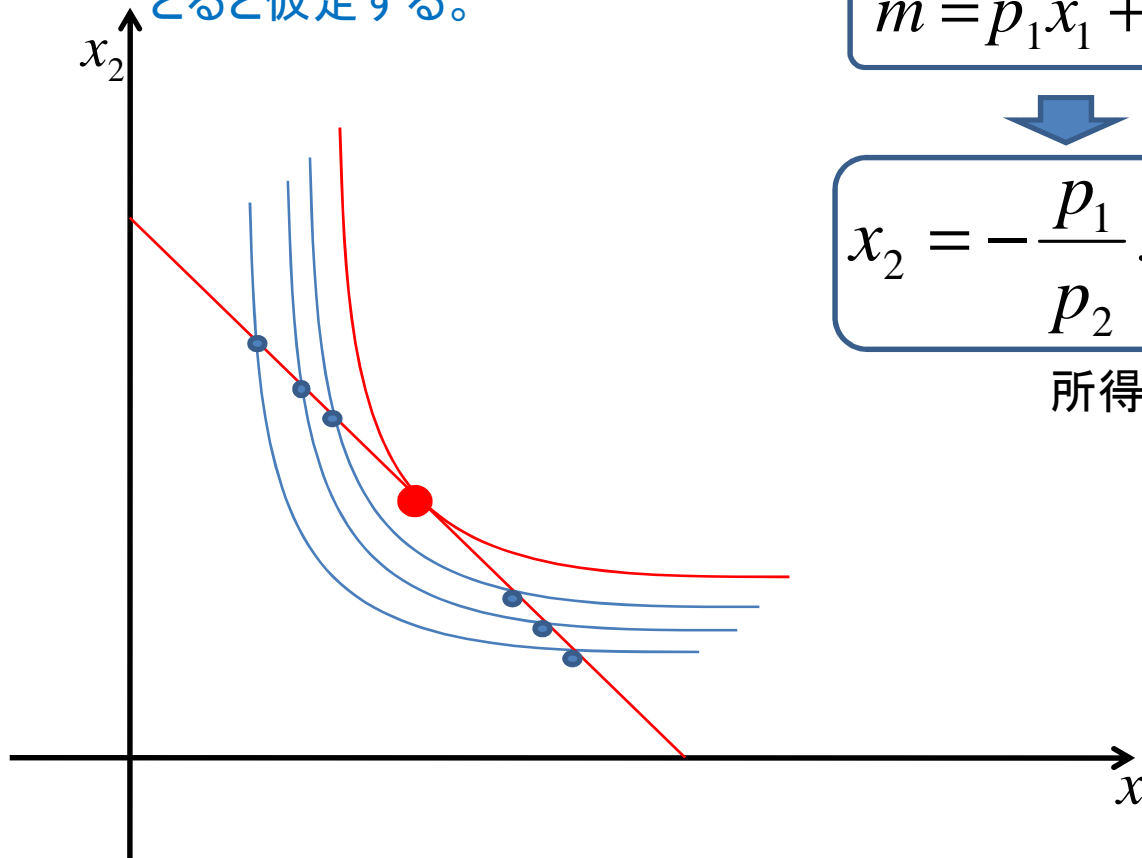


所得・価格の概念を導入1



所得・価格の概念を導入2

消費者は効用最大化行動をとると仮定する。



$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

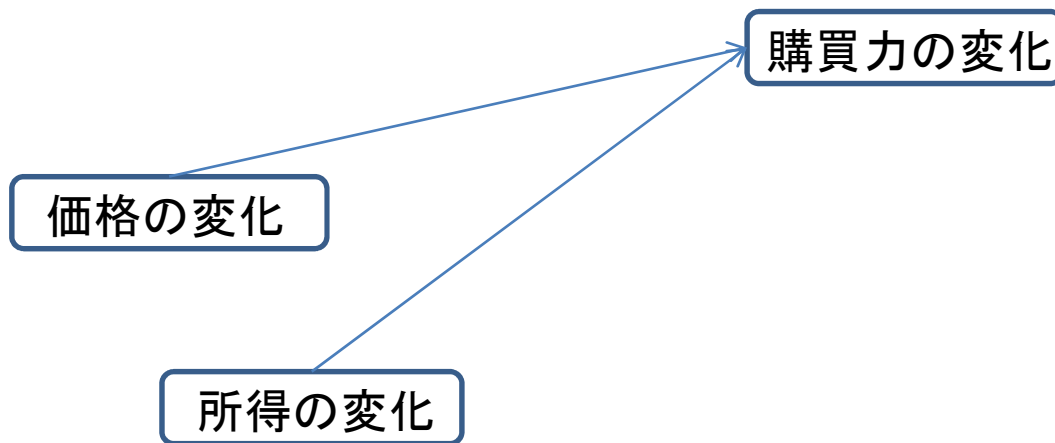


$$x_2 = -\frac{p_1}{p_2} x_1 + m$$

所得制約line

効用関数が原点に対して凸の場合(強凸性)、消費者は、所得制約線上の消費ベクトルの中から効用が最大になるベクトルを選択する。

8.1 比較静学



行動

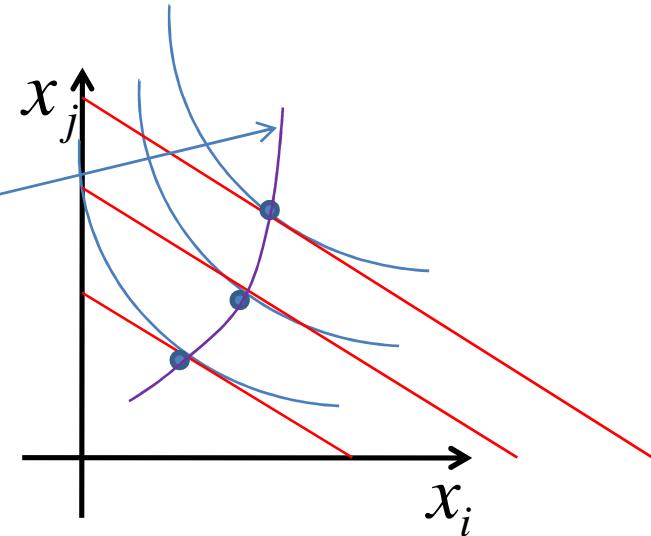
8.1 比較静学(価格一定)

①「所得変化」と「各財に対する消費需要」の関係をみる。

A、「所得」と「消費ベクトル(財の組み合わせ)」

⇒

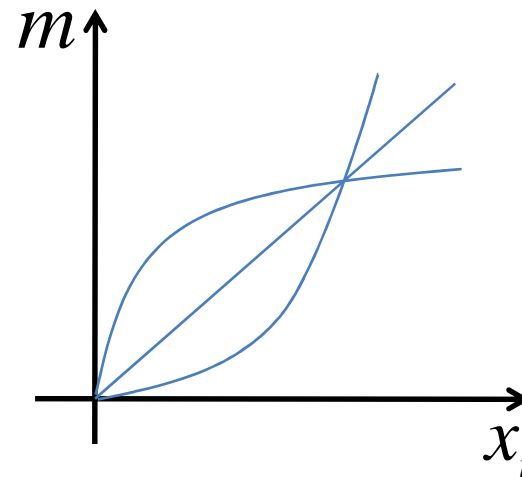
“**所得－消費曲線**”
または
“**所得拡張経路(income expansion path)**”



B、「所得」と「各財の消費量」

⇒

“**エンゲル曲線**”



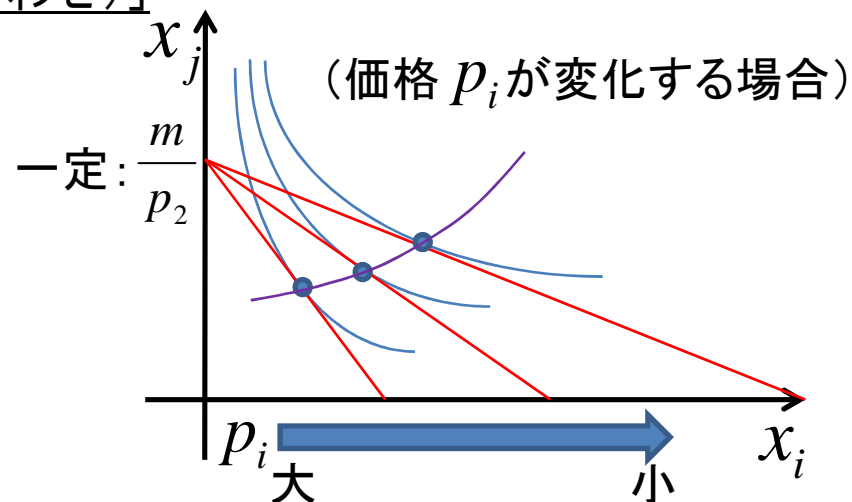
注: 価格比一定 = 所得制約線の傾きは一定

8.1 比較静学(所得一定)

①「価格変化」と「各財に対する消費需要」の関係を見る。

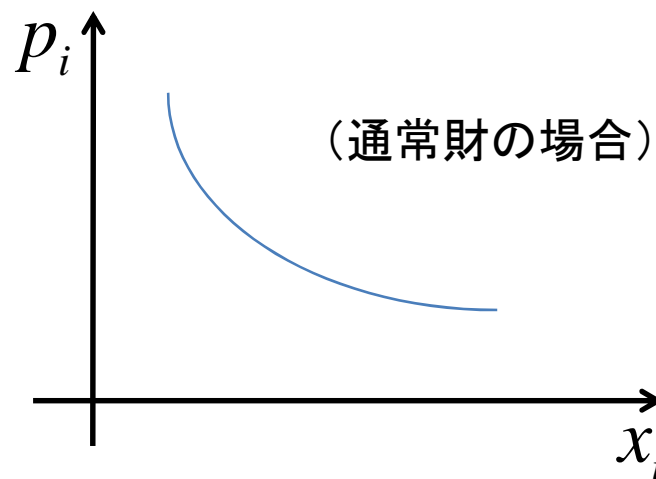
A、「価格ベクトル」と「消費ベクトル(財の組み合わせ)」

⇒ “価格－消費曲線”



B、ある財の「価格」と「消費量」

⇒ “需要曲線”



財の分類

①所得変化に対する反応の違いによる分類

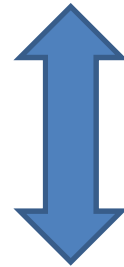
	所得	消費量
正常財	増加	増加
劣等財	増加	減少

②価格変化に対する反応の違いによる分類

	ある財iの価格	ある財iの消費量
通常財	低下	増加
ギッフェン財	低下	減少

EX. 消費税と所得税は家計にとって
どちらが良いのか？

所得税として課税される場合



効用の概念を用いて家計にとって
どちらが望ましいか比較する。

消費税として課税される場合

EX. 消費税と所得税は家計にとって どちらが良いのか？

◎2財モデルで簡単に見てみることにする◎

(1)消費者の予算制約式(課税なしの場合)

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

(2)消費者の予算制約式(第一財に対して消費税を課税した場合)

$$(p_1 + t)x_1 + p_2x_2 = m \quad \dots\textcircled{1}$$

(2)の場合の最適解: (x_1^*, x_2^*)

(3)消費者の予算制約式(同額の所得税を課税した場合)

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m - tx_1^* \quad \dots\textcircled{2}$$

(1)の場合の最適解: (x_1^{**}, x_2^{**})

EX. 消費税と所得税は家計にとって どちらが良いのか？

分析1

(x_1^*, x_2^*) は、式①と式②の両方を満たす。



(x_1^*, x_2^*) は、式①と式②の両方が通る。



$$\text{式①: } x_2 = -\left(\frac{p_1 + t}{p_2}\right)x_1 + \frac{m}{p_2}$$

$$\text{式②: } x_2 = -\left(\frac{p_1}{p_2}\right)x_1 + \frac{m - tx_1^*}{p_2}$$

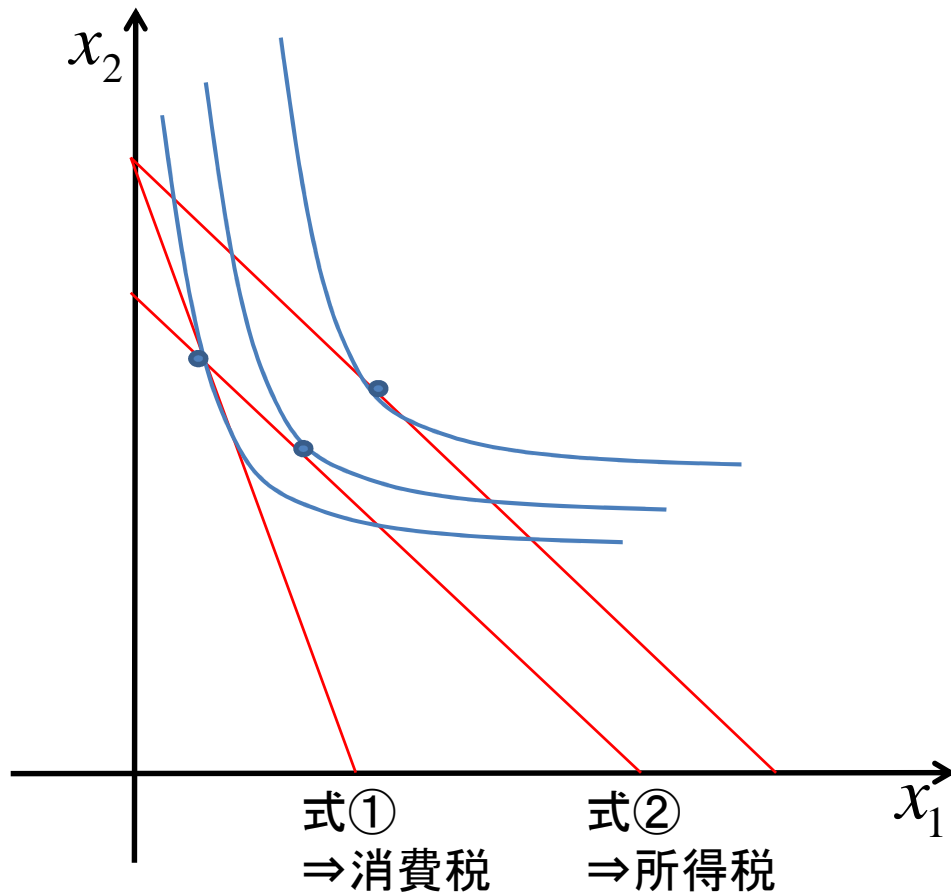
直線の傾き

$$\frac{p_1 + t}{p_2} > \frac{p_1}{p_2}$$

だから、
式②の方が式①より x_1 軸に
対して水平であることがわかる。
したがって、式②の方がより効用の
大きい無差別曲線と接することが
わかる。したがって、**所得税の方が
高い効用水準を実現することがわかる。**

注) 無差別曲線が原点に対して凸型の場合

EX. 消費税と所得税は家計にとって
どちらが良いのか？



スルツキー方程式

- マーシャルの需要関数
 $x(p, m)$

＝価格と所得が与えられた時の
需要の最適関数

- ヒックスの需要関数
 $h(p, u)$

＝価格と効用が与えられた時の
需要の最適関数。

＝補償需要関数

スルツキー方程式

$$\frac{\partial x_j(p, m)}{\partial p_i} = \frac{\partial h_j(p, v(p, m))}{\partial p_i} - \frac{\partial x_j(p, m)}{\partial m} x_i(p, m)$$



$$\frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(p, m)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p, m)}{\partial m} x_i(p, m)$$

↑
観測不可

↑
観測可

補償需要関数は直接的には観測不可能であるが、
その導関数をマーシャルの需要関数の導関数から導出できる。

スルツキー方程式の導出

x^* が環境 (p^*, m^*) において効用を最大にし、 $u^* = u(x^*)$ とする時、次の恒等式が成立する。

$$h_j(p, u^*) \equiv x_j(p, e(p, u^*))$$

これを p_i について微分し、 p^* において評価すれば次の関係を得る。

$$\frac{\partial h_j(p^*, u^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(p^*, m^*)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p^*, m^*)}{\partial m} \frac{\partial e(p^*, u^*)}{\partial p_i}$$

ここで、 $\frac{\partial e(p^*, u^*)}{\partial p_i} = x_i^*$ であるから、

$$\frac{\partial h_j(p^*, u^*)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(p^*, m^*)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p^*, m^*)}{\partial m} x_i^*$$

が求まる。(スルツキー方程式)

代替効果と所得効果

$$\Delta x_j \approx \frac{\partial x_j(p, m)}{\partial p_i} \Delta p_i = \frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_i} \Delta p_i - \frac{\partial x_j(p, m)}{\partial m} x_i^* \Delta p_i$$

代替効果
ベクトル

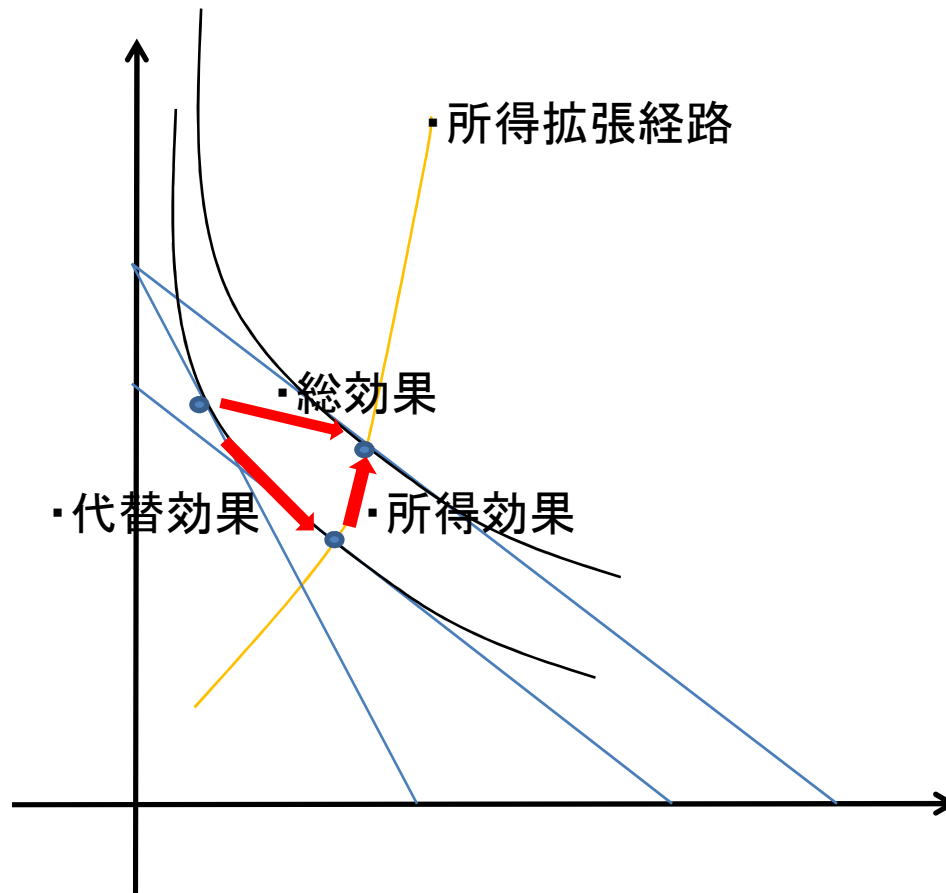
$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^s \\ \Delta x_2^s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_1^m \\ \Delta x_2^m \end{bmatrix}$$

所得効果
ベクトル

効用一定の下での変化だから、
無差別曲線に沿っている。

価格一定の下で所得が変化するから、
所得拡張経路に沿っている。

代替効果と所得効果



需要関数の特性

支出関数の特性からあたえられる。

$$(1) \quad \frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_i \partial p_j}$$

$$(2) \quad \frac{\partial h_j(p, u)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j}$$

$$(3) \quad \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_i^2} \leq 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_j}$$

可積分問題

可積分問題:「需要関数」から「効用関数」を求められるか？

EX. Royの恒等式:



$$x_i(p, m) = - \frac{\partial v(p, m) / \partial p_i}{\partial v(p, m) / \partial m}$$

(微分方程式)

↑スルツキー方程式の導出と同様に
恒等式を微分することで求められる。

可積分問題

「間接効用関数」よりも「支出関数」という観点から可積分問題を解く方がより簡単。そこで、以下の微分方程式を考える。

$$\frac{\partial e(p, u^0)}{\partial p_i} = x_i(p, e(p, u^0)) \cdots \textcircled{1}$$

$$(\quad = h_i(p, u^0))$$

$$e(p^0, u^0) = p^0 x(p^0, m^0) \quad : \text{初期条件}$$

NEXT:
可積分条件
を適用してみる。

可積分条件:

$$\frac{\partial f(p)}{\partial p_i} = g_i(p) \quad i = 1, \dots, k$$

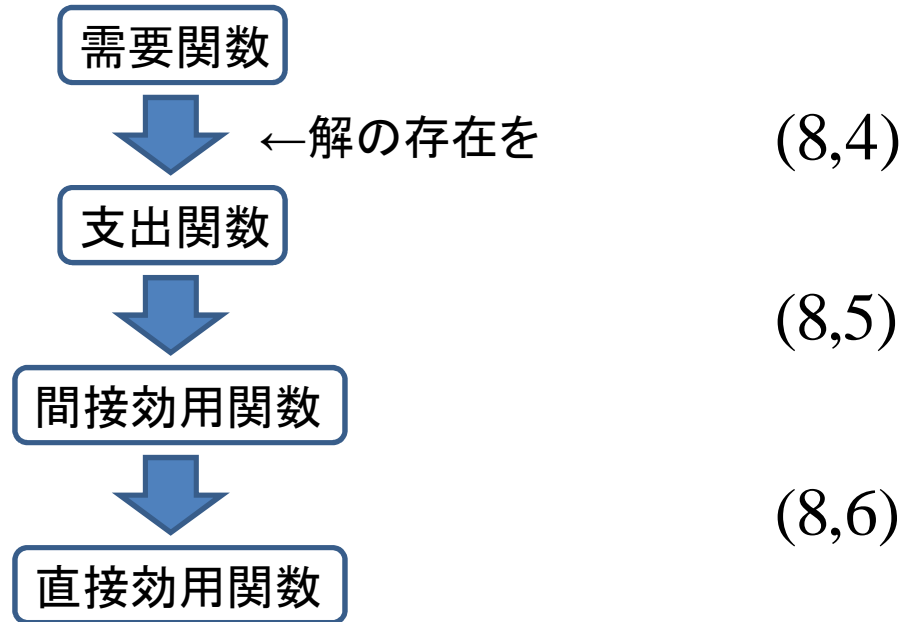
という形の偏微分方程式が局所的解をもつ時

$$\frac{\partial g_j(p)}{\partial p_i} = \frac{\partial g_i(p)}{\partial p_j} \quad \text{all } i \text{ and } j$$

が必要十分条件である。

可積分問題

ここからの流れ



可積分問題

A. ①に可積分条件を適用。

$$f(p) = e(p, u)$$

$$g_i(p) = x_i(p, e(p, u))$$

とすると、次の条件が求まる。

$$\frac{\partial x_i(p, m)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, m)}{\partial m} \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(p, m)}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p, m)}{\partial m} \frac{\partial e(p, u)}{\partial p_i}$$

対称性

可積分問題

- B. また、支出関数は価格に対して凹でなければいけないことから支出関数導出へのもう一つの条件を求める。

支出関数が価格に対して凹でなければならない。⇒

$$\frac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_i \partial p_j} \leq 0$$

2次の導関数行列が半負値定符号

可積分問題

A、Bにおける議論から、
スルツキー制約が満たされる時、
需要関数から支出関数を求めることができる。
ということがわかった。

スルツキー代替行列項が、
対称性を持ち、かつ、半負値定符号行列である。

需要関数が、対称、かつ、それから導出した代替行列が
半負値定符号行列であることを証明すれば支出関数の存在が言える。

可積分問題

以下の可積分方程式を解くことで
支出関数を、また、間接効用関数
を求めることができる。

$u^0 = v(\mathbf{q}, m)$ として $e(\mathbf{p}, u^0) = e(\mathbf{p}, v(\mathbf{q}, m))$ だから

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, v(\mathbf{q}, m))}{\partial p_i} = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, v(\mathbf{q}, m)))$$

$$s.t. \quad e(\mathbf{q}, v(\mathbf{q}, m)) = m$$

消費における双対性

次に可積分問題を解くことで求められる間接効用関数から直接効用関数を導出することを考える。



間接効用関数と直接効用関数の間にある双対性を利用して求めることができる。

$$v(\mathbf{p}') = \max_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})$$

such that $\mathbf{p}'\mathbf{x} = m$

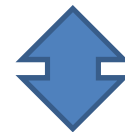


$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}'}{m}$$

所得を1に基準化

$$v(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})$$

such that $\mathbf{p}\mathbf{x} = 1$



$$u(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p}} v(\mathbf{p})$$

such that $\mathbf{p}\mathbf{x} = 1$