

1

(a) 完備性 (b) $\mathbf{x} \succeq \mathbf{x}$ (c) 推移性 (推移律) (d) 無差別 (e) 上級財 (f) 中級財 (g) 下級財 (h) 正常財 (i) ギッフェン財

2

(a) $MRS_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_1} / \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{x_2}{x_1}$

(b) 以下の最大化問題を解く

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, x_2} \ln x_1 + \ln x_2 \\ & \text{subject to} \\ & p_1 x_1 + p_2 x_2 = I, x_1 > 0, x_2 > 0 \end{aligned}$$

ラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \ln x_1 + \ln x_2 + \lambda(I - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$ から, λ を消去すると

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

これは最適消費点では個人の限界代替率が市場における限界代替率と一致することを意味する。これと $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ より, マーシャルの需要関数が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} x_1^*(\mathbf{p}, I) &= \frac{I}{2p_1} \\ x_2^*(\mathbf{p}, I) &= \frac{I}{2p_2} \end{aligned}$$

間接効用関数は, マーシャルの需要関数を元の効用関数に代入すれば求められる。

$$v(\mathbf{p}, I) = \ln \frac{I}{2p_1} + \ln \frac{I}{2p_2} = \ln \frac{I^2}{4p_1 p_2}$$

(c) $\underline{u} = v$ と見なせるから, (b) で求めた間接効用関数の式と恒等式より支出関数は以下のように求められる。

$$e(\mathbf{p}, v) = I = 2\sqrt{p_1 p_2 e^v}$$

さらに恒等式から, 補償需要関数も求められる。

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{p}, v) &= \frac{\partial e(\mathbf{p}, v)}{\partial p_1} = \sqrt{\frac{p_2 e^v}{p_1}} \\ h_2(\mathbf{p}, v) &= \frac{\partial e(\mathbf{p}, v)}{\partial p_2} = \sqrt{\frac{p_1 e^v}{p_2}} \end{aligned}$$

(d) 価格 p_1 が変化するときの財 1 に関するスルツキー方程式の代替効果 (2 つの財の相対価格が変化したことによる需要の限界的変化) は,

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{p}, v)}{\partial p_1} = -\frac{1}{2p_1} \sqrt{\frac{p_2 e^v}{p_1}}$$

で示される (効用水準が $v(= \underline{u})$ に保たれていることに注目).

一方, 所得効果 (値上がりにより実質所得が減少することによる需要の限界的変化) は以下で示される.

$$-x_1(\mathbf{p}, I) \frac{\partial x_1(\mathbf{p}, I)}{\partial I} = -\frac{I}{4p_1^2}$$

3

(a)

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, x_2} x_1^{0.5} x_2^{0.5} \\ & \text{subject to} \\ & p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{aligned}$$

(b) ラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{0.5} x_2^{0.5} - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad \text{より}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0.5 x_1^{-0.5} x_2^{0.5} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0.5 x_1^{0.5} x_2^{-0.5} - \lambda p_2 = 0$$

上記 2 式より $\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$ という関係式が成り立つ.

これと $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0$ より需要関数は次のようになる.

$$x_1(p_1, p_2, I) = \frac{I}{2p_1} \quad x_2(p_1, p_2, I) = \frac{I}{2p_2}$$

(c) 無差別曲線, 予算制約線, 最適消費点は図 1 のようになる.

(d)

i) 財 1 の価格が p_1 から $p_1 + t$ に変わったので, 予算制約式は

$$(p_1 + t)x_1 + p_2 x_2 = I$$

ii) (x_1^{**}, x_2^{**}) は p_1 が $p_1 + t$ に変わった時の最適な需要なので, (x_1^*, x_2^*) より

$$x_1^{**} = \frac{I}{2(p_1 + t)}, \quad x_2^{**} = \frac{I}{2p_2}$$

また, 予算制約線, 無差別曲線, 最適消費点を示したものは図 2 のようになる.

iii) 財 1 一つにつき t の税収があり, 需要量は x_1^{**} であるので,

$$R = t x_1^{**} = \frac{t}{2(p_1 + t)} I$$

(e)

i)

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I - R \left(= \frac{2p_1 + t}{2(p_1 + t)} I \right)$$

ii) (x_1^{***}, x_2^{***}) は予算が I が $I - R$ に変わった時の最適な需要であるので, (x_1^*, x_2^*) より

$$x_1^{***} = \frac{I - R}{2p_1}, \quad x_2^{***} = \frac{I - R}{2p_2}$$

また, 予算制約線, 無差別曲線, 最適消費点を示したものは図 3 のようになる.

iii) (d) のケースでの効用を u_d とすると,

$$u_d = u(x_1^{**}, x_2^{**}) = \frac{I}{2(p_1 + t)^{0.5} p_2^{0.5}}$$

一方, (e) のケースでの効用を u_e とすると,

$$\begin{aligned} u_e = u(x_1^{***}, x_2^{***}) &= \frac{I - R}{2p_1^{0.5} p_2^{0.5}} \\ &= \frac{I}{2(p_1 + t)^{0.5} p_2^{0.5}} \cdot \frac{2p_1 + t}{2p_1^{0.5} (p_1 + t)^{0.5}} \\ &= u_d \cdot \frac{2p_1 + t}{2p_1^{0.5} (p_1 + t)^{0.5}} \end{aligned}$$

ここでは, 二つの効用 u_d^2 と u_e^2 を比較する.

$$\begin{aligned} u_d^2 - u_e^2 &= u_d^2 \left\{ 1 - \frac{(2p_1 + t)^2}{4p_1(p_1 + t)} \right\} \\ &= -u_d^2 \cdot \frac{t^2}{4p_1(p_1 + t)} < 0 \end{aligned}$$

上式より $u_d < u_e$ であることがわかるので, (d) のケースよりも (e) のケースの方が高い効用が獲得できることがわかる.

(別解)

$R = tx_1^{**}$ より所得税がかかるケースでの予算制約線は

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 &= I - tx_1^{**} \\ \Leftrightarrow p_1(x_1 - x_1^{**}) + p_2(x_2 - x_2^{**}) &= I - \{(p_1 + t)x_1^{**} + p_2 x_2^{**}\} \\ \Leftrightarrow p_1(x_1 - x_1^{**}) + p_2(x_2 - x_2^{**}) &= 0 \end{aligned}$$

すなわち, 消費税のかかるケースでの最適消費点 (x_1^{**}, x_2^{**}) が所得税のかかるケースでの予算制約線上にあることがわかる (図 4 参照). 所得税のかかるケースでの予算制約線は効用関数 u_e に点 (x_1^{***}, x_2^{***}) で接していること, 異なる効用関数は交差しないことから実質的な所得が $I - R$ の時は (x_1^{***}, x_2^{***}) の組み合わせを (x_1^{**}, x_2^{**}) の組み合わせよりも選好しているといえる. 以上より, (d) のケースよりも (e) のケースの方が高い効用が獲得できる.

4

(a) コブダグラス型. 概形は図 5 を参照.

(b)

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2) &= \alpha \ln x_1 + (1 - \alpha) \ln x_2 \\ \text{subject to} \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= y \end{aligned}$$

(c) ラグランジュ未定乗数法を用いて解くことで、以下のように（マーシャルの）需要関数が求められる．図 5 参照．

$$x_1^* = \frac{\alpha}{p_1} y, x_2^* = \frac{1-\alpha}{p_2} y$$

(d)(e) 図 6 を参照．

