家計の保険需要分析

関川　裕己

平成１９年３月９日

1　はじめに

自然災害により物的資産の喪失・損壊の被害を受けた家計は，復旧のための資金を調達し資産の回復に努める．しかし，家計が十分な復旧資金を調達できない場合，物的資産の被害を完全には回復できず，資産損失による不可逆的な生活水準の低下を長期間にわたって受け入れざるを得なくなる．本研究では，家計が被災時に調達可能である復旧資金に限界が存在することを流動性制約と呼ぶこととする．

家計は，土地・住宅等の不動産資産や家財・自動車を購入するために，金融機関に対して負債契約を締結している場合がある．また，土地・家屋を担保物件として，金融機関より現金を借り入れている場合も少なくない．被災後に，家屋や家財を喪失して，負債のみが残る家計もある．また，担保物件を喪失する家計も存在する．このような家計は，金融機関より復旧資金を調達することは容易ではなく，流動性制約に直面することになる．流動性制約に直面した家計は，従前の資産水準に回復できず，長期間にわたる生活水準の低下が発生する．以下では，家計が流動性制約に直面し復旧が遅延するために受ける被害を，流動性被害と呼ぶこととする．

家計は，疾病（死亡），交通事故，火災等，様々なリスクに直面している．一般に，家計は保険市場で保険を購入し，疾病リスク，死亡リスク，火災リスクに対応している場合が多い．しかし，家計がすべてのリスクを保険により対応することは必ずしも経済的に合理的ではない可能性がある．あるいは，所得制約により，保険が購入可能でない場合もあろう．このため，家計が災害による資産損失リスクを正確に認識していても，そのリスクをヘッジできず，不可逆的な資産損失を受け入れざるを得ないという可能性がある．もちろん，災害リスクを正確に認知していない家計は，自然災害に対して，保険購入の動機を持たないだろう．その結果，自然災害に対して十分なリスクヘッジができず，被災した場合に不可逆的な流動性被害を被ることになる．

災害は希少性，カタストロフ性という特徴を有している．発生しうる災害の種類は，地震，水害，風害等様々である．家計は保険を購入しこれらの災害による資産損失リスクをヘッジする．住宅に関する資産損失リスクを総合的にヘッジする住宅総合保険を別にすれば，保険は個別リスクにのみ対応可能なリスクヘッジ手段である．このため，家計が各災害による資産損失リスクを保険でヘッジするためには，各災害に対応した保険をすべて個別に購入する必要がある．しかし，各災害が生起する確率は，少なからず存在するものの，それらの災害がすべて同時に生起する確率は限りなくゼロに近い．したがって，すべての種類の災害による資産損失リスクに対して，個別の保険でヘッジすることは合理的ではない可能性がある．これに対し，金融資産，土地資産は，すべての種類の金銭的リスクに対処できる保険機能を有している点は注目すべきであろう [1].

本研究では，災害による資産損失リスクに対する，家計の保険需要に注目し，家計の保険購入行動を分析する．その上で，家計が各々の災害による資産損失リスクを保険により対応することは必ずしも経済的に合理的ではない，あるいは，所得制約により，保険が購入可能でない場合もあることを示す.

表－１ 災害発生数別 状態

	災害発生数	生起確率	損害量	保険料	粗保険金
状態0	0	$(1-\pi)^N$	0	NP	0
状態1	1	$N\pi(1-\pi)^{N-1}$	L	NP	I
状態2	2	$\frac{1}{2}N(N-1)\pi^2(1-\pi)^{N-2}$	2L	NP	2I
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
状態n	n	${}_NC_n\pi^n(1-\pi)^{N-n}$	nL	NP	nI
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
状態N	N	π^N	NL	NP	NI

表－２ 同時生起確率考慮時 災害発生数別 状態

	災害発生数	生起確率	損害量	保険料	粗保険金
状態0	0	$\frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}$	0	NP	0
状態1	1	$\frac{N\pi}{1+(N-1)\pi}$	L	NP	I

2　モデル

2.1　モデル化の前提条件

問題の簡単化のために，本研究では，家計の資産損失リスクは災害によってのみ生じると仮定する．家計は初期時点で富Aを保有しており，家計の効用水準は富の大きさにより決定される．発生しうる災害の種類はN個存在し，各々の災害の生起確率は等しくπ $(0<\pi<1)$であるとする．この場合，災害発生の希少性から，各々の災害の生起確率πは，0に近い値であるとする．また，各々の災害について，災害発生時の損害量は等しくL $(0<L<A)$であり，損害量Lは非常に大きく，初期保有富Aに近い値であるとする．また各災害に対応する個別保険の保険料は等しくP，粗保険金は等しくIであるとする．以上の前提条件の下で，災害発生数に応じた各状態について，**表－１**に整理している．ここで，各々の災害の生起確率は非常に小さいことから，災害の同時生起確率はほぼ0に等しいとみなすことができる．このため，**表－１**における状態n $(n=2,\cdots,N)$は生起しないとみなすことができる．この場合，家計は，状態0，または状態1が生じうる状況下で，各災害による資産損失リスクに対し効用水準を最大化するように，最適な保険需要を決定する問題に直面することとなる．災害の同時生起確率を考慮した，災害発生数に応じた各状態について，**表－２**に整理している．

2.2　定式化

状態0の場合の富水準をW_0，状態1の場合の富水準をW_1，$U(\cdot)$を富が当該家計に与える効用水準とする．ただし，状態0の富水準W_0，状態1の富水準W_1は次の条件を満たすものとする．

$$0 \le W_0 \le A \tag{1}$$

$$0 \le W_1 \le A \tag{2}$$

この場合，家計の期待効用水準EUは，W_0，W_1を用いて次のように表せる．

$$EU = \frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}U(W_0) + \frac{N\pi}{1+(N-1)\pi}U(W_1) \tag{3}$$

ただし，W_0，W_1は次の式を満たしている．

$$W_0 = A - NP \tag{4}$$
$$W_1 = A - NP - L + I \tag{5}$$

ここで，ある1つの個別保険（保険料P，粗保険金I）に注目し，当該保険による純保険金X_sを，粗保険金と保険料の差で次のように定義する．

$$X_s = I - P \tag{6}$$

また，個別保険の保険価格ρ_sを，純保険金X_sと保険料Pの割合で次のように定義する．

$$\begin{aligned}\rho_s &= \frac{P}{X_s} \\ &= \frac{P}{I-P}\end{aligned} \tag{7}$$

保険価格ρ_sは，災害発生時に当該保険から純保険金を1単位受け取るために，当該保険に支払うべき保険料の大きさを表している．競争市場を前提とすれば，保険価格ρ_sは（純保険金X_sに代表される）保険購入量の大きさとは無関係に外生的に与えられる．今，家計が被災する可能性のある災害の種類は複数存在している．その上，各災害の生起確率は災害の種類によらず等しいため，家計はすべての災害に対しすべて個別保険を購入する必要がある．この場合，純保険金X_mを，災害発生時に家計に給付される粗保険金Iと，家計が支払うべき総保険料NPの差と定義する．このとき，純保険金X_mは次のように表せる．

$$X_m = I - NP \tag{8}$$

ここで，集約的保険価格ρ_mを，純保険金X_mと総保険料NPの割合で次のように定義する．

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{NP}{X_m} \\ &= \frac{NP}{I-NP} \\ &= \frac{A-W_0}{W_1-(A-L)}\end{aligned} \tag{9}$$

集約的保険価格ρ_mは，災害発生時に純保険金を1単位受け取るために，家計が保険料を総額でいくら支払うべきかという大きさを表している．このような所与の集約的保険価格ρ_mの大きさは，式（9）をみれば明らかなように，家計が保険契約以前の富パターン（$A-L$，A）を，契約以後の富パターン（W_1，W_0）へと変化させる際の，難易の程度を表している．

以上の前提条件の下で，家計の災害保険需要を求めよう．家計は制約の下で期待効用水準を最大化するように保険需要を決定する．この場合，家計の期待効用水準最大化問題は，次のように表すことができる．

$$\max_{w_1,w_2} EU = \frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}U(W_0) + \frac{N\pi}{1+(N-1)\pi}U(W_1) \tag{10}$$
$$s.t.\quad W_0 + \rho_m W_1 = \rho_m(A-L) + A \tag{11}$$

この最大化問題をラグランジュの未定乗数法を用いて解く．ラグランジュアンLは次のように定式化できる．

$$L = \frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}U(W_0) + \frac{N\pi}{1+(N-1)\pi}U(W_1) - \lambda(W_0 + \rho_m W_1 - \rho_m(A-L) - A) \tag{12}$$

1階条件は次式で与えられる．

$$\frac{\partial L}{\partial W_0} = \frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}\frac{\partial U}{\partial W_0} - \lambda = 0 \tag{13a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial W_1} = \frac{N\pi}{1+(N-1)\pi}\frac{\partial U}{\partial W_1} - \lambda\rho_m = 0 \tag{13b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = -W_0 - \rho_m W_1 + \rho_m (A-L) + A = 0 \tag{13c}$$

次に，期待効用極大のための2階条件は，縁付ヘッセ行列式が以下の条件を満たすことで与えられる．

$$\begin{aligned}\Delta \equiv &\begin{vmatrix} \frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial W_0^2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{N\pi}{1+(N-1)\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial W_1^2} & -\rho_m \\ -1 & -\rho_m & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{N\pi}{1+(N-1)\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial W_1^2} - \rho_m^2 \frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial W_0^2} \\ &> 0\end{aligned} \tag{14}$$

この条件は，保険加入者である家計がリスク回避的（$U''(\cdot) < 0$が成立）である限り，つねに満足されている．以上より，1階条件を満たし，制約条件（式（1），式（2））を満足する（W_0, W_1, λ）が最適解（W_0^* , W_1^*, λ^*）となる．

2.3　最適保険需要分析

ここで，家計はリスク回避的であり，一定の相対的リスク回避度r $(0 < r < 1)$をとるものとする．このことを踏まえ，家計の効用関数を次のように仮定する．

$$U(W) = W^{1-r} \tag{15}$$

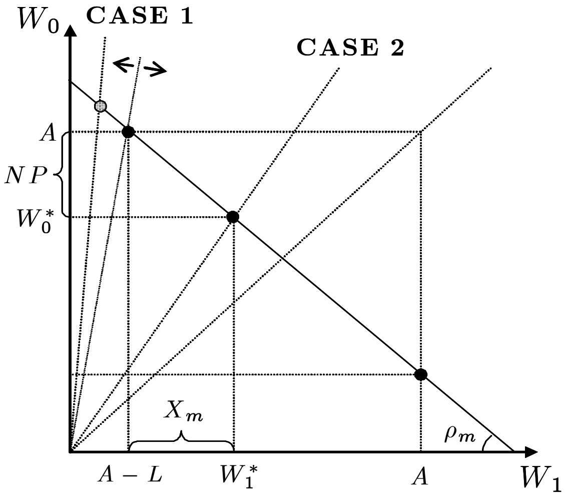
この場合，1階条件は式（13a）〜（13c）より，以下の通りとなる．

$$\lambda = (1-r)\frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}W_0^{-r} \tag{16a}$$

$$W_0 = \left(\frac{1-\pi}{N\pi}\rho_m\right)^{\frac{1}{r}} W_1 \tag{16b}$$

$$W_0 = -\rho_m W_1 + \rho_m (A-L) + A \tag{16c}$$

式（16b），式（16c）により表される直線の交点が解となる．ただし，解は制約条件（式（1），式（2））を満足する必要がある．式（16b），式（16c）の関係を**図－1**に表記している．同図では，式（16b）により表される直線の傾きの大きさに応じて，2つの場合分けを行っている．以下では，この2つの場合について分析する．



図－１ 保険需要

CASE 1

この場合，式（16b）により表される直線の傾きの大きさは，次の条件を満たしている．

$$\frac{A}{A-L} \leq \left(\frac{1-\pi}{N\pi}\rho_\alpha\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$
$$\therefore \qquad 0 < \pi \leq \frac{1}{\left(\frac{A}{A-L}\right)^r \frac{N}{\rho_m} + 1} \tag{17}$$

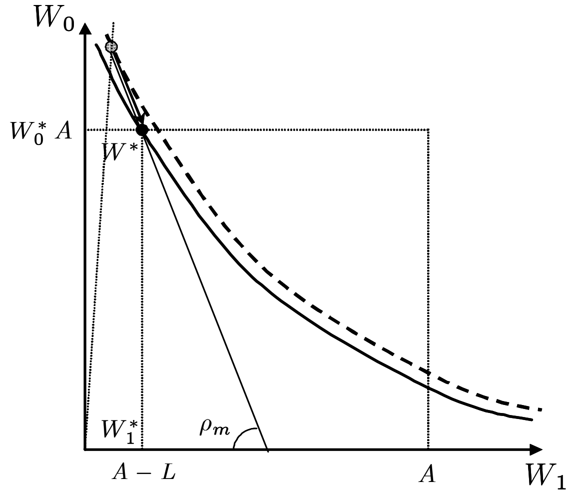
この時，式（16b），式（16c）の交点である解は，実行可能領域に含まれないため，解は端点解となる．このケースでは，家計は保険をまったく購入しない．図－２はCASE 1の状況を表している．

CASE 2

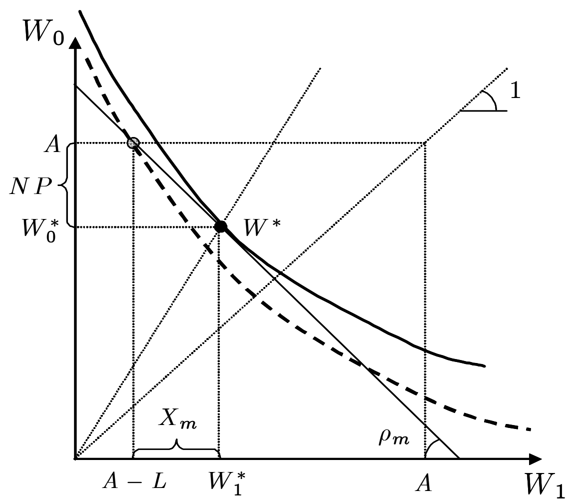
この場合，式（16b）により表される直線の傾きの大きさは，次の条件を満たしている．

$$0 < \left(\frac{1-\pi}{N\pi}\rho_m\right)^{\frac{1}{r}} < \frac{A}{A-L}$$
$$\therefore \qquad \frac{1}{\left(\frac{A}{A-L}\right)^r \frac{N}{\rho_m} + 1} < \pi < 1 \tag{18}$$

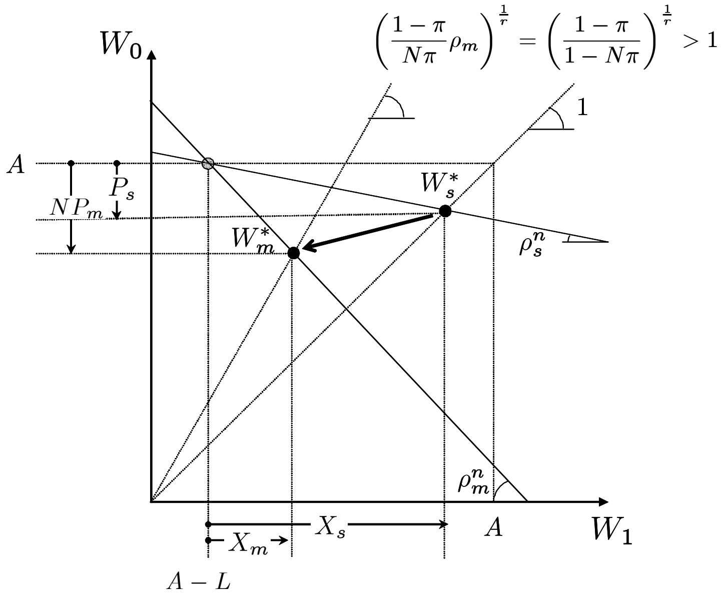
この時，式（16b），式（16c）の交点である解は，実行可能領域に含まれている．このケースでは，家計は保険を一部購入する．図－３はCASE 2の状況を表している．



図－２ CASE 1



図－３ CASE 2



図－４ 保険者がリスク中立である場合

2.3.1　保険者がリスク中立である場合

保険者がリスク中立であり，保険数理上公正な保険価格形成がなされる場合，当該保険は損害全額払いのフルカバー保険であり，保険料は期待被害額と等しい値となる．この場合，家計が支払うべき保険料と，被災時に給付される保険金は次式の通りである．

$$P = \pi L \tag{19}$$

$$I = L \tag{20}$$

これらの式を，式（9）に代入すると，集約的保険価格ρ_mは次のように表される．

$$\begin{aligned}\rho_m &= \frac{NP}{I-NP} \\ &= \frac{N\pi}{1-N\pi}\end{aligned} \tag{21}$$

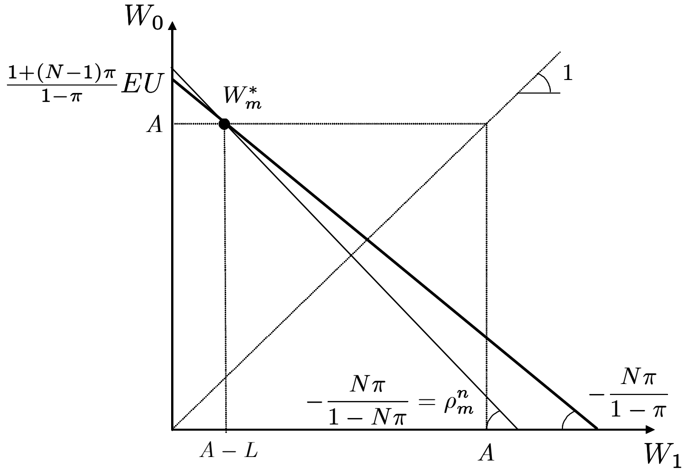
この場合，家計の期待効用最大化の１階条件は次式の通りとなる．

$$\lambda = (1-r)\frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}W_0^{-r} \tag{22a}$$

$$W_0 = \left(\frac{1-\pi}{1-N\pi}\right)^{\frac{1}{r}} W_1 \tag{22b}$$

$$W_0 = -\left(\frac{N\pi}{1-N\pi}\right)W_1 + \left(\frac{N\pi}{1-N\pi}\right)(A-L) + A \tag{22c}$$

最適解は**図－４**に示す，W_m^*となる．この場合，**図－４**をみれば明らかなように，災害が１種類のみである場合（W_s^*）に比べ，家計の保険需要は減少する．



図－５ 家計・保険者がリスク中立である場合

2.3.2　家計・保険者ともリスク中立である場合

家計がリスク中立的であることから，家計の効用関数を次のように仮定する.

$$U(W) = W \tag{23}$$

保険者がリスク中立的であり，集約的保険価格ρ_mについて式（21）が成立することを踏まえ，式（10），式（11）より家計の期待効用最大化問題を次のように表すことができる.

$$\max_{W_0,W_1} EU = \frac{1-\pi}{1+(N-1)\pi}W_0 + \frac{N\pi}{1+(N-1)\pi}W_1 \tag{24}$$

$$s.t.\quad W_0 + \frac{N\pi}{1-N\pi}W_1 = \frac{N\pi}{1-N\pi}(A-L) + A \tag{25}$$

これらの式を変形すると次のように表すことができる.

$$\max_{W_0,W_1} EU\quad W_0 = -\frac{N\pi}{1-\pi}W_1 + \frac{1+(N-1)\pi}{1-\pi}EU \tag{26}$$

$$s.t.\qquad W_0 = -\frac{N\pi}{1-N\pi}W_1 + \frac{N\pi}{1-N\pi}(A-L) + A \tag{27}$$

この場合，式（26），式（27）で表される直線の傾きについて，次式が成立する.

$$-\frac{N\pi}{1-\pi} > -\frac{N\pi}{1-N\pi} \tag{28}$$

この条件を踏まえ，式（26），式（27）及び，最適解W_m^*を図示すると，**図－５**の通りとなる．この場合，**図－５** をみれば明らかなように，家計は保険をまったく購入しない.

参考文献

[1] 世帯の復旧資金調達と流動性制約.

[2] 酒井泰弘，不確実性の経済学，有斐閣.

[3] 田畑吉雄，リスク測度とポートフォリオ管理，朝倉書店.

[4] Hal R.Varian, Microeconomic Analysis.