

海外BOTプロジェクトにおけるリスク構造分析

京都大学大学院 学生会員 ○小濱 健吾
 Perunding Atur Sdn Bhd CHIN Kar Keong
 京都大学経営管理大学院 フェロー会員 小林 潔司

1. はじめに

海外BOTプロジェクトの生み出す毎期の収益には多大なリスクが介在する。事業遂行主体であるプロジェクト企業と現地政府の間で締結される債務保証契約は、両者の間のリスク分担方式を規定し、結果的にプロジェクト企業に帰属する利潤に多大な影響を及ぼす。このような利潤帰属構造を分析するために、本研究ではオーストラリアン・オプションを用いて、プロジェクト企業と政府の間の債務保証契約に関する一考察を実施する。

2. キャッシュフロー分析

各年度の収益から操業(運営, メンテナンス)コスト及び税金支払いを差し引いた(元利金返済前)キャッシュフローを考える。まず、プロジェクトライフにわたる時間軸を離散的に捉える。プロジェクトに関わるキャッシュフローは離散化された各年度の年度末に発生すると考える。すなわち、時刻 $t = t_l$ ($l = 0, \dots, L$) を考え、 $l = 0$ をプロジェクトの運営開始年度頭、 $l = L$ を終了年度末とした時、キャッシュフローは時刻 t_l ($l = 1, \dots, L$) において発生する。また、 $t_l = t_0 + l$ ($l = 0, \dots, L$) である。つぎに、連続時間軸を導入し、プロジェクト期間中における任意の時刻を $t \in [t_0, t_L]$ と表そう。プロジェクト期間中のある時刻 t ($t \leq t_L$) において発生するキャッシュフローを予測した結果を x_t と表す。将来時点のキャッシュフローは不確実であり、プロジェクト開始時点においては確定的に予測できない。本研究におけるキャッシュフローの不確実性は、主として当該年度における交通量の不確実性に起因している。したがって、本研究では、有料道路の交通量を予測することによりキャッシュフロー過程を求めることとする。時刻 t におけるキャッシュフローの予測値 x_t を、時刻 t における予測交通量 D_t 、有料道路使用料金 F_t 、車種補正係数 α 、操業管理費用 OM_t を用いて次のように表そう。

$$x_t = D_t \times F_t \times \alpha - OM_t \quad (1)$$

ここで、予測交通量 D_t が幾何学的ブラウン過程⁸⁾

$$dD_t = \mu D_t dt + \sigma D_t dw(t) \quad (2)$$

に従うと仮定する。 μ は予想できる時間的変化率を表すパラメータ、 σ は予測不可能な確率変動幅を表すパラメータである。確率微分方程式の初期値は、プロジェクト

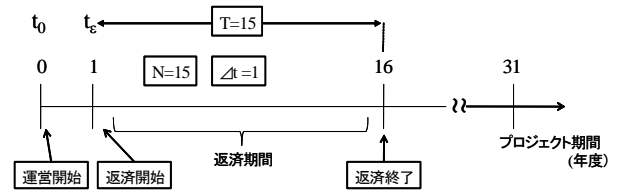


図-1 プロジェクト企業の返済スケジュール

運営開始時点の交通量の予測値 \bar{D}_{t_0} とする。また、 $w(t)$ はウィーナー過程であり、

- 1) $w(t)$ は連続であり $w(0) = 0$ である、
- 2) $w(t)$ は正規分布 $N(0, t)$ に従う、
- 3) 増分 $w(t+s) - w(t)$ は正規分布 $N(0, s)$ に従い、

時刻 t までの $w(t)$ の履歴とは独立である、という3つの性質を満足すると仮定する⁹⁾。したがって、時刻 t の交通量に対する予測値が式(2)に従う場合、時刻 t に発生する交通量は式(2)をウィーナー積分することにより確率変数

$$D_t = \bar{D}_{t_0} \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma w(t) \right\} \quad (3)$$

と表される。ここで、 D_t は対数正規分布に従うので、初期時点 $t = t_0$ で評価した時刻 t_j での交通量の期待値及び分散は次式のようになる。

$$E[D_{t_l} | \bar{D}_{t_0}] = \bar{D}_{t_0} \exp \{ \mu l \} \quad (4a)$$

$$\text{Var}[D_{t_l} | \bar{D}_{t_0}] = \{ \bar{D}_{t_0} \}^2 \exp \{ 2\mu l \} \times [\exp \{ \sigma^2 l \} - 1] \quad (4b)$$

式(4b)より l が大きいほど初期便益の分散が大きくなり、交通量の予測値の不確実性が大きくなり、キャッシュフローの不確実性も大きくなる。交通量が幾何学的ブラウン過程に従うと仮定した場合、将来時点に実現する交通量の分布は μ と σ の2つのパラメータのみによって同定することが可能である。複雑な交通量予測過程を導入するためには、より多くのリスクに関する情報が必要となる。しかし、実務的には多くのパラメータを同定することは困難であり、本研究では少ないデータのもとで推計可能な幾何学的ブラウン過程を採用する。このようにして求めた交通量予測値を用い、式(1)よりキャッシュフロー予測過程を計算する。

3. リスク構造分析

プロジェクト企業の返済スケジュールをカレンダー時刻によって表そう。プロジェクト企業が融資返済を開始してから完了するまでの時間を T とする。さらに、返済を行う回数を N 回とし、返済間隔を $\Delta t = T/N$ 、時刻 t_0 においてプロジェクトが開始され、時刻 t_ε に最初の融資返済が行われるとする。したがって、時刻 $t_j = t_\varepsilon + (p-1)\Delta t$ ($p = 1, \dots, N$)において p 回目の融資返済が行われる。ただし、 $j = \varepsilon + (p-1)$ である。本対象プロジェクトにおいては、図-1に示すように、運営が開始された後、初年度から15年度の期間、毎年融資返済が行われ、その後31年度まで運営が継続される。したがって、 $\varepsilon = 1$ 、 $T = 15$ 、 $N = 15$ 、 $\Delta t = 1$ となる。一方、キャッシュフロー予測経路の1つを ω ($\omega = 1, \dots, n$)と表そう。 n はキャッシュフロー予測経路の総数である。時刻 t において、キャッシュフロー予測経路の一つ、経路 ω を考えた時、プロジェクト企業が受け取るキャッシュフローは、 x_t^ω となる。したがって、プロジェクト企業は、各時刻 t_j にキャッシュフロー $x_{t_j}^\omega$ を受け取り、返済金 K を支払う。時刻 t_j における企業の利潤は $x_{t_j}^\omega - K$ で定義され、キャッシュフローが返済額 K を下回った場合に、公的債務保証によって負債額 $K - x_{t_j}^\omega$ を受け取る権利が得られる。すなわち、時刻 t_j における公的債務保証額は、ペイオフ関数 $\Pi(t_j, x_{t_j}^\omega)$ を

$$\Pi(t_j, x_{t_j}^\omega) = \max\{K - x_{t_j}^\omega, 0\} \quad (5)$$

とするプットオプションと考えることができる。プロジェクト企業には、 N 回の融資返済において、 M 回のオプション行使の権利が与えられているとしよう。この時、プロジェクト企業の融資返済スキームは、オーストラリアン・プットオプションと考えることができる。オーストラリアン・プットオプションの詳細に関しては参考文献¹⁾にゆずり、ここでは概要を説明するにとどめる。時刻 t_j におけるオーストラリアン・プットオプション価格は、

$$V_M(t_j, x_{t_j}^\omega) = \max \left\{ \Pi(t_j, x_{t_j}^\omega) + \bar{C}_{M-1}(t_j, x_{t_j}^\omega), \bar{C}_M(t_j, x_{t_j}^\omega) \right\} \quad (6)$$

と表すことができる。ただし、

$$\bar{C}_M(t_j, x_{t_j}^\omega) = E \left[\frac{V_M(t_{j+1}, x_{t_{j+1}}^\omega)}{(1+r)^{\Delta t}} \right] \quad (7)$$

であり、 $1/(1+r)^{\Delta t}$ は割引因子である。 $\bar{C}_M(t_j, x_{t_j}^\omega)$ を計算するに当たって、時刻 t_j の状態を考慮した条件付期待値を考える。すなわち、時刻 t_j において、オプション行使権利が m 回与えられており、キャッシュフロー $x_{t_j}^\omega$ が観測されている時、オプション価格を

$$\bar{C}_m(t_j, x_{t_j}^\omega) = E \left[\frac{V_m(t_{j+1}, x_{t_{j+1}}^\omega)}{(1+r)^{\Delta t}} \middle| x_{t_j}^\omega \right]$$

$$= E \left[y_{t_j}^m | x_{t_j}^\omega \right] \quad (8)$$

のように表す。さらに、式(8)を有限多項式で近似し、

$$\begin{aligned} \bar{C}_m(t_j, x_{t_j}^\omega) &= E \left[y_{t_j}^m | x_{t_j}^\omega \right] \\ &\approx \sum_{k=0}^Z a_k(t_j) \{x_{t_j}^\omega\}^k \end{aligned} \quad (9)$$

とする。また、係数 $a_k(t_j)$ ($k = 0, \dots, Z$)は、

$$\begin{aligned} [\hat{a}_k(t_j)]_{k=0}^Z &= \arg \min \left\| \sum_{k=0}^Z a_k(t_j) \{x_{t_j}^\omega\}^k \right. \\ &\quad \left. - \frac{V_M(t_{j+1}, x_{t_{j+1}}^\omega)}{(1+r)^{\Delta t}} \right\| \end{aligned} \quad (10)$$

によって求められる。したがって、オプション価格 $\bar{C}_m(t_j, x_{t_j}^\omega)$ は、

$$\bar{C}_m(t_j, x_{t_j}^\omega) \approx \hat{C}_m(t_j, x_{t_j}^\omega) \quad (11)$$

$$= \sum_{k=0}^Z \hat{a}_k(t_j) \{x_{t_j}^\omega\}^k \quad (12)$$

と近似され、時刻 t_j におけるプットオプション価格は、

$$V_M(t_j, x_{t_j}^\omega) \approx \max \left\{ \Pi(t_j, x_{t_j}^\omega) + \hat{C}_{M-1}(t_j, x_{t_j}^\omega), \hat{C}_M(t_j, x_{t_j}^\omega) \right\} \quad (13)$$

と表される。すなわち、

$$\begin{aligned} \Pi(t_j, x_{t_j}^\omega) + \hat{C}_{M-1}(t_j, x_{t_j}^\omega) &> \hat{C}_M(t_j, x_{t_j}^\omega) \text{ のとき} \quad \text{権利行使} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Pi(t_j, x_{t_j}^\omega) + \hat{C}_{M-1}(t_j, x_{t_j}^\omega) &\leq \hat{C}_M(t_j, x_{t_j}^\omega) \text{ のとき} \quad \text{権利不行使} \end{aligned}$$

となる。また、オプション行使権利が M 回与えられている時の、時刻 $t = t_\varepsilon$ におけるプットオプション価格を最大とするような、最適なオプション行使時刻の集合を $\tau^M = \{\tau_1^M, \dots, \tau_M^M\}$ とすると、融資返済開始時 ($t = t_\varepsilon$) において、オプション行使権利が M 回与えられている時のオーストラリアン・プットオプション価格の期待値は、

$$\begin{aligned} \hat{V}_M(t_\varepsilon, x_{t_\varepsilon}^\omega) &= \frac{1}{n} \sum_{\omega=1}^n V_M(t_\varepsilon, x_{t_\varepsilon}^\omega) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\omega=1}^n \sum_{k=1}^M \frac{\Pi(\tau_k^M, x_{\tau_k^M}^\omega)}{(1+r)^{\tau_k^M}} \end{aligned} \quad (15)$$

と表される。

4. おわりに

本研究では、某国のBOT事業をとりあげ、オーストラリアン・オプションを分析ツールとして用いることにより、プロジェクト企業と政府のリスク分担の構造、および最適行動に関する一考察を行った。実証分析の結果については発表時に報告させていただきたい。

参考文献

- [1] Chiala, N. Garvin, M, J. Vecer, J.: Valuing Simple Multiple-Exercise Real Options in infrastructure Projects : *Journal of Infrastructure Systems*, June 2007 pp.97-104