

# 劣化ハザード率評価とベンチマーキング

小濱健吾<sup>1</sup>・岡田貢一<sup>2</sup>・貝戸清之<sup>3</sup>・小林潔司<sup>4</sup>

<sup>1</sup>学生会員 京都大学大学院工学研究科 (〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)  
E-mail:k.obama@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 京都大学経営管理大学院 経営管理講座 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)  
E-mail:okada@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 大阪大学大学院 工学研究科 グローバル若手研究者フロンティア研究拠点  
(〒565-0871 吹田市山田丘2-1) E-mail:kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

<sup>4</sup>フェロー会員 京都大学経営管理大学院 経営管理講座 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)  
E-mail:kkoba@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

土木施設の劣化過程は、同一の構造・材料特性、かつ使用条件の下であっても、土木施設が置かれている環境条件や施工時における品質により、多様に異なることが多い。本研究では、土木施設の標準的な劣化過程をマルコフ劣化ハザードモデルで表現するとともに、ハザード率の異質性を確率分布で表現した混合マルコフ劣化ハザードモデルを定式化する。その上で、標準的な劣化過程をベンチマーキング劣化曲線として表現するとともに、個々の土木施設やその部材の劣化速度を相対評価するための方法論を提案する。さらに、本研究で提案した方法論を、実橋の目視検査結果に適用し、橋梁部材の劣化速度に関するベンチマーキング劣化曲線の作成と、橋梁部材の劣化速度の相対評価を試みる。

**Key Words** : comparative evaluation, asset management, mixed Markov hazard model, bench marking

## 1. はじめに

近年、目視検査データに基づく統計的劣化予測手法に関する研究が蓄積している<sup>1)</sup>。統計的劣化予測手法は、膨大な劣化情報から劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化する手法である。特に、マルコフ劣化ハザードモデル<sup>2)</sup> (以下、マルコフ劣化モデルと略記)の開発により、マルコフ推移確率の推定精度や実データへの適用性が飛躍的に向上した。さらに、マルコフ劣化モデルを搭載したアセットマネジメントシステム<sup>3)</sup>が構築され、アセットマネジメントの戦略レベルの意思決定に有用な情報の提供が可能であることが実証的に示されている。

土木施設の劣化過程は、同一の構造・材料特性、かつ使用条件の下であっても、土木施設が置かれている環境条件、施工時における品質等により、多様に異なることが一般的である。また、技術革新により土木施設の長寿命化が図られ、結果としてライフサイクル費用が低減される場合も少なくない。その中で、土木施設の品質向上とライフサイクル費用を継続的に低減するためのマネジメント技術の必要性が高まっている。このようなマネジメント上の課題を達成するためには、所与の構造・材料特性の土木施設の平均的な寿命や標準的な劣化過程を表すベンチマーキング劣化曲線を設定するとともに、対象とする土木施設の寿命や劣化速度を相対評価することが必要となる。相対評価の結果、劣

化速度が有意に早いことが判明すれば、劣化原因の究明が不可欠となる。

マルコフ劣化モデルは、膨大な劣化情報を集計し、施設固有の構造特性や環境条件を説明変数として採用できるため、個々の施設の劣化予測を行うことが可能である。しかし、土木施設の劣化過程の異質性を説明変数で表現しようとするれば、必然的に説明変数の数が増加し、個々の説明変数の説明力が低下する。また、劣化過程の異質性の中には観測不可能な要因に支配されるものもある。したがって、劣化過程の異質性を説明変数のみを用いて表現する方法には不十分と限界があり、施設個々を対象としたマイクロレベルの意思決定に対する統計的劣化予測手法の適用の弊害となっている。

以上の問題意識の下に、本研究では、土木施設間の劣化速度の多様性を異質性パラメータを用いて表現する混合マルコフ劣化モデルを提案する。また、標準的な劣化過程を表現するベンチマーキング劣化曲線の作成と、個別土木施設における劣化速度を相対評価できるような方法論を併せて提案する。さらに、実際の橋梁のRC床版を対象として、本研究で提案した方法論の有効性を検証する。以下、**2.**では、本研究の基本的な考え方を説明する。**3.**では、マルコフ劣化モデルについて概要を記述する。**4.**では、ハザード率がガンマ分布に従う混合マルコフ劣化モデルを定式化し、モデル推定のための2段階推定方法を提案する。**5.**では、実橋RC床版を対象とした実証分析について考察する。

## 2. 本研究の基本的な考え方

### (1) 従来の研究概要

土木施設の劣化予測に関しては、数多くの研究事例がある。土木施設の統計的劣化予測モデルとしてマルコフ推移確率モデルが提案されている。マルコフ推移確率の推定方法として、1) 集計的推定方法と、2) 非集計的推定方法が存在する。前者の方法は、ある一定の観測期間の中で生じたレーティング間の推移状態に関するデータに基づいて、マルコフ推移確率を直接推定することを目的とする。もっとも単純な算定方法は、レーティング間の推移状態に関する実データの数え上げにより、推移確率を直接定義する方法<sup>4)</sup>である。これに対して、最尤法により、推移確率を推定する方法<sup>5)</sup>も提案されている。マルコフ推移確率は、推移確率を定義する期間間隔に依存する。現実に検査されるレーティングデータには、観測期間長が異なる多様なデータが混在している場合が多い。この場合、実データが観測された期間間隔の差異がもたらす影響を補正することが必要となる。杉崎等は、異なる観測期間長を有する目視検査データを用いて、マルコフ推移確率を集計的に推定する方法を提案している<sup>6)</sup>。しかし、このような集計的劣化予測方法では、個々の施設が置かれている使用環境や、施設が有する構造的、機能的特性と推移確率との関係をモデル化できないという限界がある。

これに対して、非集計的推定方法は、個々の土木施設の劣化過程に関する情報に基づいて、その背後にある劣化過程の統計的規則性を推定する方法である。このような非集計的推定方法として、貝戸等<sup>7)</sup>は、ニューヨーク市（以下、NY市と略記）における橋梁の目視検査データを用いて、橋梁の劣化速度に着目した平均劣化曲線の算出方法を検討している。また、劣化速度を確率変数と捉えて、過去の検査履歴を反映したマルコフ推移確率の推定方法を提案した。その後、非集計的推定方法は、ハザードモデル<sup>8),9)</sup>の適用により、飛躍的な発展を遂げている。その中で、Michalani and Madanat<sup>10)</sup>は、2つの隣接するレーティングのみを対象として、マルコフ推移確率を指数ハザードモデルを用いて表現する方法を提案した。これとは独立に、津田等<sup>2)</sup>は、2つ以上の任意のレーティング間における推移状態を表現する多段階指数ハザードモデルを提案し、マルコフ推移確率を推定する一般的なマルコフ劣化モデルを提案した。その後、マルコフ推移確率が過去の記憶を有する非斉次マルコフ推移確率を推定するための多段階ワイブル劣化ハザードモデル<sup>11)</sup>、異なる劣化パターン間の推移過程を表現する階層型指数劣化ハザードモデル<sup>12)</sup>が提案されている。また、マルコフ推移確率の推定方法に関しては、検査データが非常に少ない段階で、技

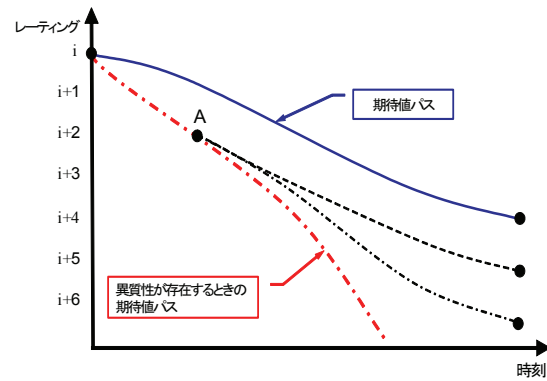


図-1 レーティングと劣化予測モデル

術者の経験情報と検査結果を結合してマルコフ推移確率を推定するベイズ推定法<sup>13),14)</sup>、予防補修により検査データが欠損することにより発生する欠損バイアスを補正する方法<sup>15)</sup>が提案されている。しかし、これらのハザードモデルは、いずれも確定的なハザード関数を用いており、個別施設に特有なハザード率の異質性を考慮できないという限界がある。このような観点から、貝戸等<sup>16)</sup>はハザード率の異質性を考慮した混合ワイブル劣化ハザードモデルを提案し、交通管制システムのマネジメントに適用している。しかし、そこでは故障の有無を表す2値変数を用いて、システムの劣化状態を表現しており、複数のレーティングを用いて表現できる劣化速度の異質性を評価できる枠組になっていない。また、土木施設のベンチマーキング劣化曲線の設定や、劣化速度の相対評価・診断という視点は見られない。本研究では、多段階階指数ハザードモデルにおけるハザード率の異質性を考慮した混合マルコフ劣化モデルを定式化するとともに、ベンチマーキング劣化曲線と劣化速度の相対評価指標を作成するための方法論を提案する。

### (2) ハザード率の異質性

本研究の実証分析の対象とする橋梁部材を例にとり、本研究における問題意識について説明する。橋梁（あるいは、その部材）の劣化速度は、同一の構造、設計仕様や使用条件の下に置かれていても、使用時間が経過するごとに劣化過程に多様な違いが現れる。マルコフ劣化モデルは、確定的な劣化過程をただ1つ示すのではなく、平均的な劣化過程（期待値パスと呼ぶ）と、その周りにおける劣化過程のちらばりを表現している。このような確率的に可能な劣化過程の中で、実現するであろう1つの劣化過程のサンプルをサンプルパスと呼ぶ。図-1は、ハザード関数が表す平均的な劣化過程を表す期待値パスと、可能な劣化過程を表すサンプル

ルパスを例示している。

マルコフ劣化モデルは、個々の橋梁部材の劣化特性をハザード関数を用いて表現する。ハザード関数の説明変数として、劣化過程に影響を及ぼす主要な要因がとりあげられる。しかし、ハザード関数は確定的であり、説明変数として取り上げていないような個別要因（以下、異質性パラメータと呼ぶ）が劣化過程に及ぼす影響を表現できない。図-1を用いて、確定的ハザード関数を用いたマルコフ劣化モデルの限界について説明しよう。いま、ある部材の劣化が進展し、ある時刻で図中の点Aに示すようなレーティングが観察されたと考えよう。本サンプルパスでは、実線で示す平均的な期待値パスよりも、かなり劣化が早く進行している。ハザード関数に異質性が存在しない場合、点A以降のサンプルパスは、図の破線のように分布する。マルコフ劣化モデルでは、点A以降の劣化過程が、過去の劣化履歴とは無関係となる。その結果、図の破線で示すようなサンプルパスが得られる。しかし、この部材の劣化過程が、ハザード関数の説明変数として取り上げていない個別要因の影響を受けており、その結果として他の部材より早く劣化速度が進展していると考えよう。この場合、図において1点鎖線で示すように、通常の劣化過程より早く劣化するサンプルパスが出現する可能性が高い。さらに、ハザード率に異質性が存在するとき、図の太字の1点鎖線で示すように、期待値パスも標準的な期待値パスよりも、下方に位置すると考えた方が自然であろう。このように、個別部材の劣化過程に個別的な異質性要因が介在する場合、マルコフ劣化モデルを用いて劣化予測を行うと、1) 期待値パスのシフトで代表されるような劣化過程のシステム的な推定誤差、2) 各レーティングの段階におけるハザード率の相関性という問題に起因して、劣化過程に推定誤差が発生する可能性がある。

### (3) 混合マルコフ劣化モデル

伝統的なハザード解析では、確定的ハザード関数を用いて、ランダムな故障事象の発生過程を分析することが多かった。しかし、ハザード率に異質性が存在する場合、従来のハザード解析の方法を拡張することが必要となる。ハザード率の異質性を考慮する方法として、1) グループ特性の相違をダミー変数で表現する方法、2) ハザード率の確率分布を考慮する方法が考えられる。前者の方法は、簡便で分かりやすいという利点がある。その一方で、異質性を考慮するために、グループ特性を表すダミー変数の数が増加し、モデルの推定結果の効率性が著しく低下するという問題が生じる。たとえば、本研究の実証分析では、1,481橋を対象として、RC床版の劣化速度を橋梁ごとに相対比較する。し

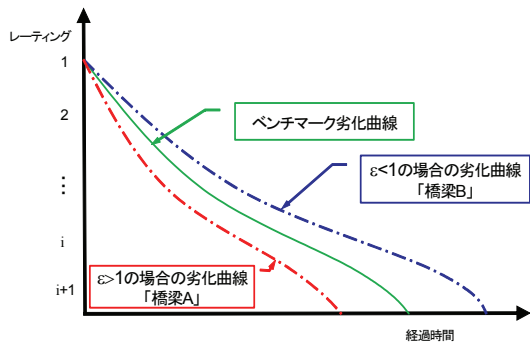
かし、各橋梁の異質性を1,480個のダミー変数で表現したようなマルコフ劣化モデルを定式化することは現実的でないだろう。さらに、ハザード率の異質性を表現するために説明変数の数を増加しても、依然として説明変数として表現しきれない異質性が残存している可能性も存在する。したがって、本研究では、後者の方法、すなわちグループのハザード率の異質性を確率分布で表現するような混合ハザードモデルを用いる。混合ハザードモデルでは、ハザード関数を支配する異質性パラメータが、ある確率密度関数に従って分布すると考える。その上で、混合ハザードモデルを、ハザード関数と異質性パラメータの確率分布の確率的コンボリューションにより定義する。このような混合ハザードモデルに関しては、すでにいくつかの提案<sup>17)–21)</sup>がなされている。また、貝戸等が路上障害物の到着過程をモデル化するなど、アセットマネジメントへの適用事例<sup>22)</sup>も現れている。本研究では、津田らが開発したマルコフ劣化モデルに対して、各レーティングにおける劣化速度の異質性を明示的に考慮した混合マルコフ劣化モデルを提案する。3.で説明するように、マルコフ劣化モデルでは、単位時間間隔あたりにレーティングが1つ進展する（劣化が進展し、レーティングが悪くなる）確率をハザード率を用いて表現する。混合マルコフ劣化モデルでは、個々の橋梁部材の劣化特性の異質性を異質性パラメータという確率変数を用いて表現する。異なるレーティングのハザード率に対して同一の異質性パラメータが含まれるようなマルコフ劣化モデルを開発することにより、図-1で太字の1点鎖線で示したように異なるレーティングにおける劣化速度間に相関性を有する劣化過程を表現することが可能となる。

### (4) ベンチマーキングと相対評価

いま、土木施設システムを構成する施設・要素群をK個のグループに分類し、各グループごとの劣化速度を相対評価する問題を考えよう。本研究の実証分析では、橋梁RC床版の劣化速度の相対評価問題を取りあげる。その際、個別橋梁単位を1グループと考え、ある1つの橋梁を構成する複数のRC床版を、同一グループに含まれる要素と位置づける。この場合、RC床版の劣化速度を橋梁間で比較する問題は、グループ間の劣化速度を相対評価する問題として定式化できる。このような劣化速度を相対比較する問題は、橋梁以外にも数多くの土木施設に共通して見出すことが可能である。例えば、路線や竣工時期ごとに舗装の劣化速度を比較する問題も、同様に劣化速度の相対評価問題として定式化できる。

このような劣化速度の相対比較を実施する場合、混

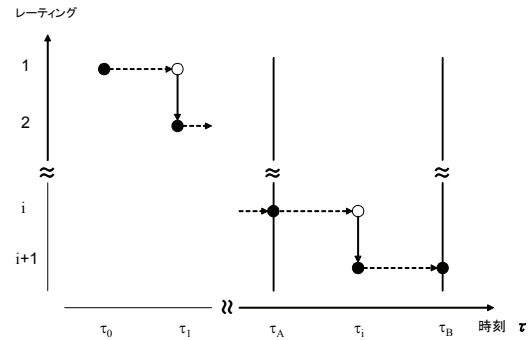




注) 実線は $\varepsilon = 1$ の場合と対応しており、ベンチマーク劣化曲線を表す。ベンチマーク劣化曲線より下方に位置する劣化曲線は平均より劣化の進行が早い場合を、上方に位置する場合は劣化進行が遅いことを意味する。

図-2 劣化曲線の相対評価

合マルコフ劣化モデルは重要な役割を果たすことになる。混合マルコフ劣化モデルでは、異質性パラメータの推定値により、劣化速度の相対評価を行うことが可能である。異質性パラメータの詳細に関しては、4.(2)で議論することとし、ここでは異質性パラメータ $\varepsilon$ を劣化速度の違いを表す確率変数とする。このとき、異なる橋梁のRC床版の平均的劣化曲線が、時間の関数として図-2に示すように表現できたと考える。比較の対象とする橋梁は、すべて同一の構造・材料特性、使用条件を有していると考えられる。同図において実線で描かれた平均的劣化曲線は、対象とする橋梁群の平均的な劣化曲線を表している。この平均的な劣化曲線より下方に位置する橋梁Aは、平均的劣化曲線より劣化速度が速いと評価できる。逆に、上方に位置する橋梁Bは、劣化速度が遅いと評価できよう。平均的な劣化曲線は、橋梁の劣化速度の大小関係の評価するための基準となる劣化曲線であり、本研究ではベンチマーク劣化曲線と呼ぶこととする。混合マルコフ劣化モデルを用いれば、同一特性を有する橋梁の劣化速度の違いを、異質パラメータを用いて表現することができる。このうち、ベンチマーク劣化曲線では、異質性パラメータが $\varepsilon = 1$ となる。また、 $\varepsilon > 1$ の場合、ベンチマーク劣化曲線より劣化速度が速く、 $\varepsilon < 1$ の場合は、劣化速度が遅いと評価することができる。同図の橋梁Aでは、劣化曲線がベンチマーク劣化曲線よりかなり下方に位置しており、劣化速度が相対的に早いと判断できる。このように他の同じような橋梁よりも、劣化速度が相当程度大きいことが判明した場合、劣化の進行が早い理由に関して究明することが必要となる。一方、橋梁Bは、劣化曲線がベンチマーク劣化曲線より上方に位置している。たとえば、橋梁Bに予防保全対策が施されているのであれば、その効果が橋梁Bの長寿命化効果として表れ



注) 時刻 $\tau_i$  ( $i = 0, 1, \dots, I - 1$ )のレーティングが変化する。目視検査が実施される時刻 $\tau_A, \tau_B$ では、レーティングが変化した時刻は判らない。

図-3 劣化過程

ていると判定することができよう。このように、混合マルコフ劣化モデルを用いて、個々の橋梁の劣化速度を相対評価することにより、橋梁のアセットマネジメントの高度化のための有用な情報を提供することが可能となる。なお、以上では、同一の構造・材料特性を持つ橋梁を対象とした劣化速度の相対評価問題を取りあげた。しかし、異質性パラメータを導入した混合マルコフ劣化モデルを用いることにより、構造・材料特性や、使用条件が異なる異質な橋梁の劣化速度を比較することも可能になるという利点がある。したがって、本モデルを用いることにより、異なるタイプの橋梁で構成される橋梁群に対して、個々のタイプの橋梁の劣化過程に関するベンチマーク劣化曲線を設定したり、劣化速度を相対的に検討するための相対評価モデルを開発することが可能となる。

### 3. マルコフ劣化モデル

#### (1) モデル化の前提条件

多数の土木施設で構成されるような土木施設システムを考えよう。土木施設システムを構成するある要素群の劣化特性をマルコフ劣化モデルで記述する。本研究の実証分析では、橋梁群を構成する部材（たとえば、RC床版）が要素群に該当する。土木施設の各要素の劣化過程をモデル化するために、ひとまず各要素の劣化速度に異質性が存在しないマルコフ劣化モデルを考えよう。いま、ある要素の劣化に関する履歴が図-3に示すように与えられたとする。同図は、要素が補修されずに放置された時に、劣化がどのように進展するかを表したものである。現実には、要素の劣化過程には不確実性が含まれ、しかも劣化状態は時間軸上の限られた時刻で実施される検査を通じてのみ知ることができる。図中、時刻 $\tau$ はカレンダー上の実時刻（以下、時刻と呼ぶ）を表す。時刻 $\tau_0$ で橋梁の供用が開始された直後

から劣化が始まる。施設の劣化状態は  $I$  個のレーティングで記述される。施設のレーティングを表す状態変数を  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) で表現しよう。施設がもっとも健全な (劣化が進展していない) 状態を  $i = 1$  で表し、状態変数  $i$  の値が大きくなるほど、劣化が進展していることを表す。  $i = I$  の場合、当該の施設は供用限界に到達している。図中の時刻  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, I - 1$ ) において、レーティングが  $i$  から  $i + 1$  に移行している。しかし、目視検査は同図における 2 つの時刻  $\tau_A, \tau_B$  において実施される。したがって、観測者が獲得できる情報は、検査時刻におけるレーティングのみであり、レーティングが推移した時刻  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, I - 1$ ) に関する情報は得られない。

## (2) マルコフ推移確率モデル

土木施設の劣化過程をマルコフ推移確率モデルを用いて表現しよう。いま、2 つの時刻間におけるレーティング間の推移状態をマルコフ推移確率で表現する。時刻  $\tau_A$  におけるレーティングを状態変数  $h(\tau_A)$  を用いて表そう。時刻  $\tau_A$  におけるレーティングが  $i$  ( $i = 1, \dots, I$ ) であれば  $h(\tau_A) = i$  と表せる。マルコフ推移確率は、時刻  $\tau_A$  で観測されたレーティング  $h(\tau_A) = i$  を与件とし、将来時点 (例えば  $\tau_B$ ) においてレーティング  $h(\tau_B) = j$  が生起する条件付推移確率として定義される。すなわち、

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] = \pi_{ij} \quad (1)$$

と表せる。このような推移確率をレーティングペア  $(i, j)$  に対して求めれば、マルコフ推移確率行列

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{II} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を定義できる。マルコフ推移確率 (1) は所与の 2 つの時点  $\tau_A, \tau_B$  の間において生じるレーティング間の推移確率を示したものである。当然のことながら、対象とする検査間隔が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{ij} = 0$  ( $i > j$ ) が成立する。また、推移確率の定義より  $\sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1$  が成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して

$$\left. \begin{array}{l} \pi_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, I) \\ \pi_{ij} = 0 \quad (i > j \text{ の時}) \\ \sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1 \end{array} \right\} \quad (3)$$

が成立しなければならない。状態  $I$  は、補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり、 $\pi_{II} = 1$  が成立する。なお、マルコフ推移確率は過去の劣化履歴とは独立して定義される。マルコフ劣化モデルでは、レーティングが  $i - 1$  から  $i$  に推移した時刻に関わらず、検査時刻  $\tau_A$  から検査時刻  $\tau_B$  の間に推移する確率は時刻  $\tau_A$

におけるレーティングのみに依存するという性質 (マルコフ性) を満足する。

## (3) マルコフ劣化モデル

マルコフ推移確率は、マルコフ劣化モデルを用いて推定できる。本研究では、津田等<sup>2)</sup>が開発したマルコフ劣化モデルを用いるが、読者の便宜を図るためモデルの概要を説明しておく。いま、レーティング  $i$  ( $i = 1, \dots, I - 1$ ) の寿命を確率変数  $\zeta_i$  で表す。レーティング  $i$  の寿命が、確率密度関数  $f_i(\zeta_i)$ 、分布関数  $F_i(\zeta_i)$  に従うと仮定する。ここで、図-3において、レーティングが変化した時刻  $\tau_i$  ( $i = 0, \dots, I - 2$ ) を起点とする時間軸 (以下、サンプル時間軸と呼ぶ) を考えよう。レーティング  $i$  のサンプル時間軸上で、カレンダー時刻  $\tau_{i-1}$  からの経過時間を  $y_i$  と表記する。定義より、時刻  $\tau_{i-1}$  では  $y_i = 0$  となる。ここで、時刻  $\tau_{i-1}$  にレーティングが  $i$  となり、そこから時間  $y_i$  が経過した時刻においてレーティングが  $i + 1$  に変化する確率密度をハザード関数  $\lambda_i(y_i)$  を用いて表現する<sup>8),9)</sup>。ハザード関数は、レーティングが  $i$  となった時刻から、時間  $y_i$  が過ぎる間、レーティングが  $i$  のまま継続する生存確率  $\tilde{F}_i(y_i)$  を用いて、

$$\lambda_i(y_i) \Delta y_i = \frac{f_i(y_i) \Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \quad (4)$$

と表せる。すなわち、ハザード関数  $\lambda_i(y_i)$  は、初期時刻  $\tau_{i-1}$  ( $y_i = 0$ ) から時間  $y_i$  が経過するまでレーティング  $i$  の状態が継続したという条件の下で、期間  $[y_i, y_i + \Delta y_i)$  中にレーティング  $i + 1$  に進展する条件付確率である。ハザード関数が経過時間  $y_i$  に依存せず、常に一定値  $\lambda_i > 0$  ( $i = 1, \dots, I - 1$ ) をとる場合、指数ハザード関数

$$\lambda_i(y_i) = \lambda_i \quad (5)$$

が成立する。指数ハザード関数を用いることにより、劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現できる。さらに、指数ハザード関数を用いれば、レーティング  $i$  の寿命が  $y_i$  以上となる確率  $\tilde{F}_i(y_i)$  は、

$$\tilde{F}_i(y_i) = \exp(-\lambda_i y_i) \quad (6)$$

と表現できる。

さらに、カレンダー時刻  $\tau_A$  の目視検査の結果、レーティングが  $i$  と判断されたとしよう。そののち、時刻  $\tau_A$  から追加的に期間  $z (\geq 0)$  以上にわたってレーティング  $i$  が継続する確率  $\tilde{F}_i(\tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A)$  は、

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i(\tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A) &= \text{Prob}\{\zeta_i \geq \tau_A + z | \zeta_i \geq \tau_A\} \\ &= \frac{\exp\{-\lambda_i(\tau_A + z)\}}{\exp(-\lambda_i \tau_A)} = \exp(-\lambda_i z) \end{aligned} \quad (7)$$

と表される。すなわち、検査時刻  $\tau_A$  においてレーティングが  $i$  と判定され、次の検査時刻  $\tau_B = \tau_A + z$  においてもレーティングが  $i$  と判定される確率は、

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = i | h(\tau_A) = i] = \exp(-\lambda_i z) \quad (8)$$

となる。ただし、 $z$ は2つの検査時刻の間隔を表す。確率  $\text{Prob}[h(\tau_B) = i | h(\tau_A) = i]$  はマルコフ推移確率  $\pi_{ii}(z)$  にはかならない。指数ハザードを用いた場合、推移確率  $\pi_{ii}(z)$  はハザード関数  $\lambda_i$  と検査間隔  $z$  のみに依存し、時刻  $\tau_A$ 、 $\tau_B$  に関する情報を用いなくとも推移確率を推定することが可能となる。以上の議論を拡張し、指数ハザード関数を用いて、検査時刻  $\tau_A$  と  $\tau_B = \tau_A + z$  の間でレーティングが  $i$  から  $j$  ( $> i$ ) に推移するマルコフ推移確率  $\pi_{ij}(z)$  ( $i = 1, \dots, I-1; j = i, \dots, I$ ) は、

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(z) &= \text{Prob}[h(\tau_B) = j | h(\tau_A) = i] \\ &= \sum_{m=i}^j \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_m} \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_m} \exp(-\lambda_m z) \\ &\quad (i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I) \end{aligned} \quad (9)$$

と表すことができる<sup>2)</sup>。ただし、表記上の規則として、

$$\begin{cases} \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_m} = 1 & (m = i \text{ の時}) \\ \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_m} = 1 & (m = j \text{ の時}) \end{cases}$$

が成立すると考える。さらに、表記の便宜上、

$$\begin{aligned} &\prod_{s=i, \neq m}^{j-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_m} \exp(-\lambda_m z) \\ &= \prod_{s=i}^{m-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_s - \lambda_m} \prod_{s=m}^{j-1} \frac{\lambda_s}{\lambda_{s+1} - \lambda_m} \exp(-\lambda_m z) \end{aligned}$$

と簡略化する。また、 $\pi_{iI}$  に関しては、マルコフ推移確率の条件より次式で表せる。

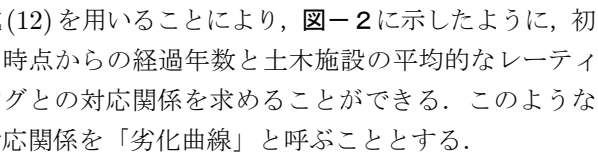
$$\pi_{iI}(z) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}(z) \quad (i = 1, \dots, I-1) \quad (10)$$

なお、マルコフ劣化モデルを用いれば、アセットマネジメントのためのリスク管理指標を導出できる。すなわち、当該レーティングにはじめて到達した時点から、劣化が進展して次のレーティングに進むまでの期待期間長（以下、レーティング期待寿命と呼ぶ）は、生存関数  $\tilde{F}_i(y_i)$  を用いて

$$RMD_i = \int_0^{\infty} \tilde{F}_i(y_i) dy_i \quad (11)$$

と表される<sup>8)</sup>。ここで、指数ハザード関数を用いた生存関数  $\tilde{F}_i(y_i)$  が式(6)で表されることに留意すれば、レーティング期待寿命は次式で表される。

$$RMD_i = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda_i y_i) dy_i = \frac{1}{\lambda_i} \quad (12)$$

式(12)を用いることにより、に示したように、初期時点からの経過年数と土木施設の平均的なレーティングとの対応関係を求めることができる。このような対応関係を「劣化曲線」と呼ぶこととする。

## 4. 劣化速度の相対評価モデル

### (1) 相対評価とベンチマーキング

土木施設の劣化特性は、たとえば施工条件等、多様な要因の影響を受けることが予想される。したがって、各要素の劣化特性を表すハザード率は確定値ではなく、観察が困難な個別的な要因の影響を受け、個別要素ごとに確率変動すると考えることが自然である。以下では、個別要素ごとのハザード率の異質性を確率変数で表現した混合マルコフ劣化モデルを定式化する。ハザード率の異質性を考慮することにより、1) 標準的な劣化過程を表すベンチマーク劣化曲線を設定する、2) 個別要素の劣化速度の相対評価を行うことが可能である。ここで、土木施設の要素を  $K$  個のグループに分類し、各グループごとの劣化速度を相対的に比較評価する問題を考えよう。

土木施設をグルーピングする仕方は、劣化速度の相対評価を行う目的に依存する。本研究の実証分析では、橋梁のRC床版を対象とした劣化速度の相対評価を試みるが、分析目的によりRC床版のグルーピングの方法が異なる。たとえば、1つの橋梁は、数多くのRC床版で構成されるが、橋梁ごとに床版の劣化速度の相対評価を試みる場合、各橋梁を構成するRC床版群全体を1つのグループと考えることになる。もちろん、橋梁の構造・材料特性や、使用条件は橋梁ごとに異なっているため、目視検査の結果で得られた劣化速度を直接比較することには問題がある。そこで、本研究では、個別橋梁の構造・材料特性や使用条件を考慮した上で、各橋梁を構成するRC床版の標準的な劣化過程を表すベンチマーキング劣化曲線を設定する。さらに、ベンチマーキング劣化曲線を基準として、当該の橋梁部材の劣化速度を評価できるような方法論を提案する。

### (2) 混合ハザードモデル

分析対象とする土木施設システムを構成する要素を  $K$  個のグループに分割しよう。さらに、グループ  $k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) には、合計  $L_k$  個の要素が存在すると考える。グループ  $k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) に固有なハザード率の変動特性を表すパラメータ（以下、異質性パラメータと呼ぶ） $\epsilon^k$  を導入しよう。この時、グループ  $k$  の要素  $l_k$  ( $l_k = 1, \dots, L_k$ ) のレーティング  $i$  ( $i = 1, \dots, I-1$ ) のハザード率を、混合指数ハザード関数

$$\begin{aligned} \lambda_i^{l_k} &= \tilde{\lambda}_i^{l_k} \epsilon^k \\ &\quad (i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K; l_k = 1, \dots, L_k) \end{aligned} \quad (13)$$

を用いて表そう。ここに、 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$  はグループ  $k$  の要素  $l_k$  が有するレーティング  $i$  の平均的なハザード率（以下、標準ハザード率と呼ぶ）である。異質性パラメータ  $\epsilon^k$  は、グループ  $k$  の標準ハザード率  $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$  からの乖離の程度を表す

確率変数であり、 $\varepsilon^k \geq 0$ が成立すると仮定する。異質性パラメータ $\varepsilon^k$ の値が大きくなるほど、当該グループ $k$ に含まれるすべての施設の劣化速度が、標準ハザード率に対して速いことを表す。式(13)において、すべてのレーティングの混合指数ハザード関数に、同一の確率変数 $\varepsilon^k$ が含まれることに留意しよう。これにより、あるレーティングにおいて劣化速度が速い場合、他のレーティングの劣化速度も相対的に速くなることを表すことができる。いま、異質性パラメータ $\varepsilon^k$ が、ガンマ分布 $f(\varepsilon^k : \alpha, \gamma)$

$$f(\varepsilon^k : \alpha, \gamma) = \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} (\varepsilon^k)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^k}{\gamma}\right) \quad (14)$$

から抽出された確率標本であると考えよう。ガンマ分布 $f(\varepsilon^k : \alpha, \gamma)$ の平均は $\alpha\gamma$ で、分散は $\alpha\gamma^2$ である。さらに、 $\alpha = 1$ の場合は、指数分布に一致する。

ここで、グループ $k$  ( $k = 1, \dots, K$ )の異質性パラメータ $\varepsilon^k$ の値を $\varepsilon^k$ に固定しよう。この時、グループ $k$ のレーティング $i$ の寿命が $y_i^k$ 以上となる確率(6)は、指数ハザード関数(13)を用いて

$$\tilde{F}_i(y_i^k) = \exp(-\tilde{\lambda}_i \varepsilon^k y_i^k) \quad (15)$$

と書き換えることができる。さらに、グループ $k$ の検査時刻 $\tau_A^k$ においてレーティングが $i$ と判定され、次の検査時刻 $\tau_B^k = \tau_A^k + z^k$ においてもレーティングが $i$ と判定される確率 $\pi_{ii}^k(z^k : \varepsilon^k)$ は、

$$\pi_{ii}^k(z^k : \varepsilon^k) = \exp(-\tilde{\lambda}_i^k \varepsilon^k z^k) \quad (16)$$

となる。また、検査時刻 $\tau_A^k$ と $\tau_B^k = \tau_A^k + z^k$ の間でレーティングが $i$ から $j$  ( $> i$ )に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}^k(z^k : \varepsilon^k)$ は、式(9)、(13)より、

$$\begin{aligned} \pi_{ij}^k(z^k : \varepsilon^k) &= \sum_{s=i}^j \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^k}{\tilde{\lambda}_m^k - \tilde{\lambda}_s^k} \exp(-\tilde{\lambda}_s^k \varepsilon^k z^k) \\ &= \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^k) \exp(-\tilde{\lambda}_s^k \varepsilon^k z^k) \end{aligned} \quad (17)$$

$(i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I; k = 1, \dots, K)$

と表すことができる。ただし、 $\tilde{\lambda}^k = (\tilde{\lambda}_1^k, \dots, \tilde{\lambda}_{I-1}^k)$ である。また、 $\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^k)$ は

$$\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^k) = \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^k}{\tilde{\lambda}_m^k - \tilde{\lambda}_s^k} \quad (18)$$

となり、平均的ハザード率のみの関数で表される。また、 $\pi_{ij}^k(z^k : \varepsilon^k)$ に関しては、マルコフ推移確率の条件より式(10)で表せる。

### (3) 混合マルコフ劣化モデルの導出

つぎに、パラメータ $\varepsilon^k$ がガンマ分布(14)に従って分布する場合を考えよう。記述の簡便化のために、本節では上付き添え字 $k$ を省略する。まず、レーティング $i$ の

寿命が $y_i$ 以上となる確率(6)は、生存関数(15)を用いて

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{ii}(z) &= \int_0^\infty \pi_{ii}(z : \varepsilon) f(\varepsilon : \alpha, \gamma) d\varepsilon \\ &= \int_0^\infty \exp(-\tilde{\lambda}_i \varepsilon z) \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} \varepsilon^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right) d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \exp\left\{\left(-\tilde{\lambda}_i z - \frac{1}{\gamma}\right) \varepsilon\right\} \varepsilon^{\alpha-1} d\varepsilon \\ &(i = 1, \dots, I-1) \end{aligned} \quad (19)$$

と表すことができる。ここで、 $u_i = (\tilde{\lambda}_i z + \frac{1}{\gamma}) \varepsilon$ と置き、確率密度関数の変数変換を行えば

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{ii}(z) &= \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \exp(-u_i) \left(\frac{u_i}{\tilde{\lambda}_i z + \frac{1}{\gamma}}\right)^{\alpha-1} \\ &\quad \frac{1}{\tilde{\lambda}_i z + \frac{1}{\gamma}} du_i \\ &= \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_i z + \frac{1}{\gamma}}\right)^\alpha \int_0^\infty \exp(-u_i) u_i^{\alpha-1} du_i \\ &= \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_i z + \frac{1}{\gamma}}\right)^\alpha \Gamma(\alpha) \\ &= \frac{1}{(\tilde{\lambda}_i \gamma z + 1)^\alpha} \end{aligned} \quad (20)$$

を得る。マルコフ推移確率 $\tilde{\pi}_{ii}(z)$ は、ハザード率の確率分布を考慮した検査間隔 $z$ の平均的なマルコフ推移確率(以下、平均マルコフ推移確率と呼ぶ)を表している。さらに、検査間隔 $z$ の下でレーティング $i$ からレーティング $j$ へ推移する平均マルコフ推移確率は

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{ij}(z) &= \int_0^\infty \pi_{ij}(z : \varepsilon) f(\varepsilon : \alpha, \gamma) d\varepsilon \\ &= \int_0^\infty \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}) \exp(-\tilde{\lambda}_s \varepsilon z) f(\varepsilon : \alpha, \gamma) d\varepsilon \\ &= \sum_{s=i}^j \frac{\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda})}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \exp\left\{\left(-\tilde{\lambda}_s z - \frac{1}{\gamma}\right) \varepsilon\right\} \varepsilon^{\alpha-1} d\varepsilon \\ &= \sum_{s=i}^j \frac{\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda})}{(\tilde{\lambda}_s \gamma z + 1)^\alpha} \end{aligned} \quad (21)$$

と表せる。ガンマ分布(14)の平均は $\mu = \alpha\gamma$ で、分散は $\sigma^2 = \alpha\gamma^2$ である。いま、異質性パラメータ $\varepsilon$ が、ハザード率の期待値が平均ハザード率 $\tilde{\lambda}_i$ に一致するように分布していると考えよう。そこで、平均1、分散 $1/\phi$ のガンマ分布

$$\tilde{f}(\varepsilon : \phi) = \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} \varepsilon^{\phi-1} \exp(-\phi\varepsilon) \quad (22)$$

を仮定すると、平均マルコフ推移確率は

$$\tilde{\pi}_{ii}(z) = \frac{\phi^\phi}{(\tilde{\lambda}_i z + \phi)^\phi} \quad (23a)$$

$$\tilde{\pi}_{ij}(z) = \sum_{s=i}^j \frac{\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}) \phi^\phi}{(\tilde{\lambda}_s z + \phi)^\phi} \quad (23b)$$

$$(i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I)$$



と表される.

#### (4) 混合マルコフ推移確率の推定

土木施設に対して, 2つの異なる時点において目視検査が実施された場合を考えよう. その上で, 2つの異なる時点におけるレーティング情報に基づいて, 混合マルコフ推移確率を推定する問題を取りあげる. あるいは, 土木施設が供用され, 目視検査がはじめて実施された場合でも, 供用開始時点と目視検査時点という2つの時点におけるレーティング情報を獲得することができる. いま, 土木施設グループ $k$  ( $k = 1, \dots, K$ )の要素 $l_k$  ( $l_k = 1, \dots, L_k$ )に関して, 初回の目視検査が実施されたカレンダー時刻を $\tau_A^{l_k}$ と表そう. それから, 時間 $z^{l_k}$ が経過したカレンダー時刻 $\tau_B^{l_k} = \tau_A^{l_k} + z^{l_k}$ に, 2度目の目視検査が実施されたと考える. 記号「 $\cdot$ 」は実測値であることを表す.  $\sum_{k=1}^K L_k = L$ 個の検査サンプルには, 初回から2回目の目視検査が実施された時刻までの期間長 $z^{l_k}$ と, 2回の目視検査で計測された橋梁部材のレーティング結果 $h(\tau_A^{l_k})$ ,  $h(\tau_B^{l_k})$ に関する情報が利用可能である. ここで, 検査時点の橋梁部材のレーティング結果に基づいて, ダミー変数 $\delta_{ij}^{l_k}$  ( $i = 1, \dots, I-1, j = i, \dots, I; l_k = 1, \dots, L_k; k = 1, \dots, K$ )を

$$\delta_{ij}^{l_k} = \begin{cases} 1 & h(\tau_A^{l_k}) = i, h(\tau_B^{l_k}) = j \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (24)$$

と定義する. さらに, ダミー変数ベクトルを $\delta^{l_k} = (\delta_{11}^{l_k}, \dots, \delta_{I-1,I}^{l_k})$ , 施設の劣化速度に影響を及ぼす施設の構造特性や環境条件を表す特性行ベクトルを $\mathbf{x}^{l_k} = (\bar{x}_1^{l_k}, \dots, \bar{x}_M^{l_k})$ と表す. ただし,  $\bar{x}_m^{l_k}$  ( $m = 1, \dots, M$ )はグループ $k$ の要素 $l_k$ の検査サンプルに関する $m$ 番目の説明変数の観測値を表す. また, 第1番目の説明変数は定数項に該当する変数であり, 恒等的に $x_1^{l_k} = 1$ である. 定期的な目視検査で得られるグループ $k$ の検査サンプル $l_k$ が有する情報を $\xi^{l_k} = (\delta^{l_k}, z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k})$ と表そう. また, 目視検査データ全体を $\Xi$ と表す.

さらに, 検査サンプル $l_k$  ( $l_k = 1, \dots, L_k$ )の劣化過程を混合指数ハザード関数 $\lambda_i^{l_k}(y_i^{l_k}) = \tilde{\lambda}_i^{l_k} e^k$  ( $i = 1, \dots, I-1$ )を用いて表現しよう. レーティング $I$ はマルコフ連鎖の吸収状態であり,  $\pi_{II}^{l_k} = 1$ が成立するためにハザード率 $\tilde{\lambda}_I^{l_k}$ は必然的に $\tilde{\lambda}_I^{l_k} = 0$ となる. 土木施設の劣化過程を特徴づける標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$  ( $i = 1, \dots, I-1; l_k = 1, \dots, L_k$ )は施設の特性ベクトルに依存して変化すると考え, 標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$ を特性ベクトル $\mathbf{x}^{l_k}$ を用いて

$$\tilde{\lambda}_i^{l_k} = \exp(\mathbf{x}^{l_k} \boldsymbol{\beta}'_i) \quad (25)$$

と表そう. ただし,  $\boldsymbol{\beta}_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,M})$ は未知パラメータ $\beta_{i,m}$  ( $m = 1, \dots, M$ )による行ベクトル, 記号「 $'$ 」は転置操作を表す. また,  $x_1^{l_k} = 1$ より,  $\beta_{i,1}$ は定数

項を表す. 平均マルコフ推移確率は, 式(23a),(23b)で示したように, 各レーティングにおける標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$  ( $i = 1, \dots, I-1; l_k = 1, \dots, L_k$ )と異質性パラメータの確率分布の分散パラメータ $\phi$ を用いて表現できる.

平均マルコフ推移確率は, 施設の特性ベクトル $\mathbf{x}^{l_k}$ を用いて式(25)で表現できる. また, 推移確率はデータが観察された検査間隔 $z^{l_k}$ にも依存する. これらのことを明示的に表すため平均マルコフ推移確率 $\tilde{\pi}_{ij}^{l_k}$ を目視検査による実測データ $(z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k})$ と未知パラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_{I-1}, \phi)$ の関数として $\tilde{\pi}_{ij}^{l_k}(z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k}; \boldsymbol{\theta})$ と表そう. いま,  $\sum_{k=1}^K L_k$ 個の橋梁部材の劣化現象が互いに独立であると仮定すれば, 全検査サンプルの劣化推移パターンの同時生起確率密度を表す尤度関数は

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \Xi) = \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \tilde{\pi}_{ij}^{l_k}(z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k}; \boldsymbol{\theta}) \right\}^{\delta_{ij}^{l_k}} \quad (26)$$

と定式化できる<sup>25)</sup>. ただし,  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}, \phi)$ である. また,  $\tilde{\pi}_{ij}^{l_k}(z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k}; \boldsymbol{\theta})$ は, 前回の検査時点にレーティングが $i$ であるという条件の下で, 今回のレーティングが $j$ となるレーティング推移確率であり,

$$\tilde{\pi}_{ii}^{l_k}(z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{\phi^\phi}{\{\exp(\mathbf{x}^{l_k} \boldsymbol{\beta}'_i) z^{l_k} + \phi\}^\phi} \quad (27a)$$

$$\tilde{\pi}_{ij}^{l_k}(z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{s=i}^j \frac{\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k}) \phi^\phi}{\{\exp(\mathbf{x}^{l_k} \boldsymbol{\beta}'_s) z^{l_k} + \phi\}^\phi} \quad (27b)$$

$(i = 1, \dots, I-1; j = i, \dots, I; l_k = 1, \dots, L_k; k = 1, \dots, K)$

と表される. ただし,

$$\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k}) = \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\exp(\mathbf{x}^{l_k} \boldsymbol{\beta}'_m)}{\exp(\mathbf{x}^{l_k} \boldsymbol{\beta}'_m) - \exp(\mathbf{x}^{l_k} \boldsymbol{\beta}'_s)} \quad (28)$$

である. 検査データ $\delta_{ij}^{l_k}, z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k}$ はすべて確定値であり, 対数尤度関数は未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}, \phi$ の関数である. 最尤法では, この尤度関数(26)を最大にするようなパラメータ値 $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\phi})$ を推定することになる. ここで, 尤度(26)の対数尤度関数

$$\ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \Xi) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i}^I \sum_{k=1}^K \sum_{l_k=1}^{L_k} \delta_{ij}^{l_k} \ln \tilde{\pi}_{ij}^{l_k}(z^{l_k}, \mathbf{x}^{l_k}; \boldsymbol{\theta}) \quad (29)$$

を定義しよう. 対数尤度関数(29)を最大にするようなパラメータ値 $\boldsymbol{\theta}$ の最尤推定値は,

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \Xi)}{\partial \theta_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, (I-1)M+1) \quad (30)$$

を同時に満足するような $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{(I-1)M+1})$ として与えられる. さらに, パラメータの漸近的な共分散行列の推定値 $\hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ は,

$$\hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left[ \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \Xi)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]^{-1} \quad (31)$$



と表すことができる。ただし、上式の右辺の逆行列は  $\partial^2 \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Xi}) / \partial \theta_i \partial \theta_j$  を要素とする  $3 \times 3$  次 Fisher 情報行列<sup>25)</sup>の逆行列である。

### (5) 異質性パラメータの推定

グループ  $k$  の検査サンプル  $\boldsymbol{\xi}^{l_k}$  ( $l_k = 1, \dots, L^k$ ) に着目しよう。検査サンプル  $l_k$  の 1 回目の目視検査によるレーティングを  $i(l_k)$  ( $l_k = 1, \dots, L^k$ )、2 回目の目視検査の結果を  $j(l_k)$  と表そう。さらに、パラメータの最尤推定量  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{I-1}, \hat{\phi})$  を与件としよう。この時、異質性パラメータがガンマ分布  $\bar{f}(\varepsilon : \hat{\phi})$  (式(22)を参照) に従い、グループ  $k$  に属する  $L^k$  個の検査サンプル  $\boldsymbol{\xi}^{l_k}$  ( $l_k = 1, \dots, L^k$ ) が得られた場合、これら  $L^k$  個の検査サンプルが得られる異質性パラメータ  $\varepsilon^k$  に関する同時生起確率密度関数 (部分尤度) は、

$$\begin{aligned} \rho^k(\varepsilon^k : \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\xi}^k) &= \left\{ \pi_{i(l_k)j(l_k)}^{l_k}(\bar{z}^{l_k}, \bar{\boldsymbol{x}}^{l_k} : \right. \\ &\quad \left. \hat{\boldsymbol{\beta}}, \varepsilon^k) \right\}^{\delta_{i(l_k)j(l_k)}^{l_k}} \bar{f}(\varepsilon^k, \hat{\phi}) \\ &\propto \prod_{l_k=1}^{L^k} \left\{ \sum_{m=i(l_k)}^{j(l_k)} \psi_{i(l_k)j(l_k)}^m(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \right. \\ &\quad \left. \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\varepsilon^k \bar{z}^{l_k}) \right\}^{\delta_{i(l_k)j(l_k)}^{l_k}} \\ &\quad \left\{ (\varepsilon^k)^{\hat{\phi}-1} \exp(-\hat{\phi}\varepsilon^k) \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

と表される。ただし、 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (\tilde{\lambda}_1^{l_k}(\hat{\boldsymbol{\theta}}), \dots, \tilde{\lambda}_{I-1}^{l_k}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))$  であり、標準ハザード率ベクトルである。ここでは、標準ハザード率  $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$  が、パラメータ  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  に依存していることを明示的に表現するために  $\tilde{\lambda}_i^{l_k}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  と表している。式(32)の両辺の対数をとることにより、部分対数尤度は、

$$\begin{aligned} \ln \rho^k(\varepsilon^k : \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\xi}^k) & \\ &\propto \sum_{l_k=1}^{L^k} \bar{\delta}_{i(l_k)j(l_k)}^{l_k} \ln \left\{ \sum_{m=i(l_k)}^{j(l_k)} \psi_{i(l_k)j(l_k)}^m(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_k}(\hat{\boldsymbol{\theta}})) \right. \\ &\quad \left. \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\varepsilon^k \bar{z}^{l_k}) \right\} + \left\{ (\hat{\phi} - 1) \ln \varepsilon^k - \hat{\phi} \varepsilon^k \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

と表せる。したがって、異質性パラメータ  $\varepsilon^k$  ( $k = 1, \dots, K$ ) の条件付き最尤推定量は、条件付対数尤度最大化問題

$$\max_{\varepsilon^k} \left\{ \ln \rho^k(\varepsilon^k : \hat{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\xi}^k) \right\} \quad (34)$$

の最適解  $\varepsilon^k$  として求めることができる。以上の方法で求めた異質性パラメータの最尤推定量は、パラメータ  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_{I-1}, \hat{\phi})$  を与件として求めた条件付最尤推定量である。このことを明示的に表現するために、問題(34)の解を、 $\varepsilon^k(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  ( $k = 1, \dots, K$ ) と表そう。

### (6) 相対評価モデル

混合マルコフ劣化モデルのパラメータの最尤推定量  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 、及び異質性パラメータの最尤推定量  $\hat{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  を用いれば、各グループごとの土木施設の劣化速度の相対評価を容易に行えることができる。推計結果により、異質性パラメータが平均値 1、分散  $\hat{\phi}^{-1}$  のガンマ分布  $\bar{f}(\varepsilon : \hat{\phi})$  に従うことが判明したとしよう。ここで、各グループごとに求めた異質性パラメータの推定値に基づいて、劣化の進行が早いグループの集合を定義する。いま、全グループの中で、劣化速度の速いグループの上位  $\alpha \times 100\%$  の中に入るような土木施設のグループの集合  $\bar{\Omega}_\alpha$  (重点監視集合  $\bar{\Omega}_\alpha$  と呼ぶ) を

$$\bar{\Omega}_\alpha = \{k \in (1, \dots, K) | \hat{\varepsilon}^k(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq \bar{\varepsilon}_\alpha\} \quad (35)$$

と定義する。ここに、 $\bar{\varepsilon}_\alpha$  は、信頼度  $(1 - \alpha) \times 100\%$  とした場合の異質パラメータの上限値 (以下では、臨界的異質パラメータ値と呼ぶ) であり

$$\bar{\varepsilon}_\alpha = \min_c \left\{ c \left| \int_c^\infty \bar{f}(\varepsilon : \hat{\phi}) d\varepsilon \leq \alpha \right. \right\} \quad (36)$$

で定義される。異質性パラメータの推定値が信頼度  $(1 - \alpha) \times 100\%$  の重点監視集合  $\bar{\Omega}_\alpha$  に属する場合、当該グループに属する土木施設は信頼度  $(1 - \alpha) \times 100\%$  で、劣化の進行が速いと判断することができる。逆に、信頼度  $(1 - \alpha) \times 100\%$  で、劣化の進行が遅いと評価できるグループ集合を

$$\underline{\Omega}_\alpha = \{k \in (1, \dots, K) | \hat{\varepsilon}^k(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \leq \underline{\varepsilon}_\alpha\} \quad (37a)$$

$$\underline{\varepsilon}_\alpha = \max_c \left\{ c \left| \int_0^c \bar{f}(\varepsilon : \hat{\phi}) d\varepsilon \leq \alpha \right. \right\} \quad (37b)$$

と定義する。土木施設のあるグループが、集合  $\underline{\Omega}_\alpha$  に属する場合、当該グループに属する土木施設は、信頼度  $\alpha \times 100\%$  で、劣化の進行が遅いと評価できる。また、アセットマネジメントの立場からは、土木施設の特性に関わらず劣化速度が大きい施設に関しては、継続的なモニタリングを実施することが求められる。そこで、混合ハザード率の推定値  $\hat{\lambda}_i^{l_k} = \hat{\lambda}_i^{l_k} \varepsilon^k$  自体を管理する場合を考えよう。ここに、記号  $\hat{\cdot}$  は、推定値であることを示す。そこで、混合ハザード率の推定値  $\hat{\lambda}_i^{l_k}$  を大きい順番に  $\hat{\lambda}_i^{l(1)}, \dots, \hat{\lambda}_i^{l(n)}, \dots, \hat{\lambda}_i^{l(L)}$  と並べ直そう。ただし、上付き添字  $l(n)$  は、すべてのグループに属する土木施設の中で、混合ハザード率の推定値  $\hat{\lambda}_i^{l_k}$  が  $n$  番目に大きい施設の添え字  $l_k$  を表す。したがって、 $\hat{\lambda}_i^{l(1)}$  は、もっとも劣化速度が大きい土木施設の混合ハザード率と対応する。また、 $L = \sum_{k=1}^K L_k$  はサンプル総数である。以上の記号の定義の下で、劣化速度の速い土木施設の上位  $\alpha \times 100\%$  の中に入るような土木施設の集合  $\tilde{\Omega}_\alpha$  (重点監視集合  $\tilde{\Omega}_\alpha$  と呼ぶ) を

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_\alpha &= \{l(1), \dots, l(n^*(\alpha))\} \\ n^*(\alpha) &= \arg \sup_n \left\{ \frac{n}{L} \leq \alpha \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

と定義する。ただし、 $n$ は自然数である。

以上の相対評価モデルを用いて、土木施設の劣化速度を評価した結果、グループの劣化速度が重点監視集合 $\bar{\Omega}_\alpha$ 、あるいは重点監視集合 $\tilde{\Omega}_\alpha$ に属することが判明した場合、そのグループに属する要素は何らかの理由で劣化速度が速いと診断することができる。このような要素に関しては、劣化の進行が早い理由に関して力学的、材料学的な分析を行うことが必要であろう。あるいは、データベースの中に、新材料、新工法を用いて試験的に施工した箇所の劣化データが含まれている場合、試験的施工の結果が長寿命化に資するかどうかは、そのグループの要素が重点監視集合 $\bar{\Omega}_\alpha, \tilde{\Omega}_\alpha$ に含まれるかどうかを分析することにより判断できる。このように、本研究で提案した混合マルコフ劣化モデルを用いれば、土木施設のモニタリングの結果に基づいて、個別の土木施設の劣化速度に関する事後的な相対評価を実施することが可能となる。

## 5. 実証分析

### (1) データベースの概要

本研究で提案した方法論の有効性を検討するために、NY市が管理する橋梁の目視検査データを用いて、混合マルコフ劣化モデルのパラメータと個別橋梁の異質性パラメータの推定を試みる。NY市の橋梁目視検査および検査データの詳細については、すでに多くの文献<sup>26),27)</sup>で紹介しているので、ここでは適宜概要を述べるに止める。混合マルコフ劣化モデルの具体的な推定対象として、橋梁部材の中でも、直接輪荷重が作用し、維持管理上の重要部材であるRC床版を取り上げる。NY市のRC床版に対する目視検査の7段階のレーティング評価基準を表-1に示す。本研究では、1987年から1996年にかけて実施された目視検査データをもとにデータベースを作成し、このデータベースを用いて混合指数ハザード関数のパラメータを推定した。なお、データベースでは、各橋梁部材ごとに識別番号が割り当てられており、これにより同一部材の検査履歴を把握することができる。さらに、部材ごとに、構造特性や環境条件に関する情報が収録されている。また、橋梁のグルーピングを橋梁単位で行ったため、橋梁グループ総数は1,481グループとなった。このことより、同一グループ(橋梁)の中に属する要素(RC床版)の特性値はすべて同一の値をとる。なお、補修の実施や、検査誤差などの理由により、定期検査によるレーティングが前回のものより回復しているサンプルは予め除外した。さらに、5.(2)で述べるように説明変数として採用した平均交通量、床版面積に関する情報が同時に利用可能であるサンプルのみを抽出した。その結果、混合マ

| レーティング | 物理的な意味 (RC床版)   |
|--------|---|
| 1      | 新設状態、劣化の兆候がほとんどみられない。                                     |
| 2      | 1と3の間   |
| 3      | 一部分で漏水が確認できる。(漏水を伴う一方向ひび割れ、端部に斑点状の漏水)                     |
| 4      | 3と5の間   |
| 5      | 床版面積75%以上から漏水が確認できる。一部分で剥離や剥落が確認できる。桁上フランジに沿った遊離石灰が確認できる。 |
| 6      | 5と7の間   |
| 7      | 深刻な剥落や遊離石灰が確認できる。抜け落ちやその傾向が確認できる。                         |

注) 実際のNY市のレーティング評価では、新設状態をレーティング7に、以降劣化が進行するほどレーティング番号が小さくなるようにレーティングが表記されている。

ルコフ劣化モデルの推定のために、合計32,902個のサンプルが利用可能であった。なお、これ以降の分析では、表記上の煩雑さを回避するために、説明変数として使用する平均交通量および床版面積のデータを、全サンプル32,902個の中のそれぞれの最大値が1となるように基準化して用いることとする。

### (2) 推定結果

上記のデータベースを用いて、混合マルコフ劣化モデルを推定した。同データベースでは、RC床版のレーティングが7段階のレーティングで評価されている。レーティング7の状態を除く合計6つのレーティングに対して、混合マルコフ劣化モデルを定義することができる。各レーティングに対応する劣化速度を表す混合指数ハザード関数の説明変数の候補として、データベースで利用可能な変数を取りあげ、それらの説明変数を組み合わせ、混合指数ハザード関数を推定した。その中で、符号条件を満足し、かつ説明変数の説明力に関する仮説を有意水準5%の尤度比検定で棄却されないような説明変数の組み合わせを選択した。その結果、最終的に平均交通量、床版面積が、混合指数ハザード関数の説明変数として採用された。各橋梁グループ $k(k = 1, \dots, 1,481)$ のRC床版に対する混合指数ハザード関数を、これらの説明変数を用いて具体的に書き表せば、

$$\lambda_i^k = \exp(\beta_{i,1} + \beta_{i,2}x_2^k + \beta_{i,3}x_3^k)\varepsilon^k \quad (39)$$

$$(i = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, 1,481)$$

となる。ただし、 $x_2^k$ は平均交通量、 $x_3^k$ は床版面積(橋面積/スパン数)、 $\varepsilon^k$ は、橋梁 $k(k = 1, \dots, 1,481)$ の劣化特性を表す異質パラメータである。橋梁 $k$ は、 $l_k$ 個の床版で構成されており、目視検査データは各床版ごとに整備されている。しかし、平均交通量は同一橋梁を構成す

る床版である限り、共通した値をとる。また、床版面積も同一サイズであることが多い。したがって、同一橋梁を構成する床版の特性変数は、すべて同一の値をとると考える。その結果、各橋梁の床版の劣化過程は、すべて同じ混合指数ハザード関数(39)で表現される。しかし、床版ごとに劣化速度が異なるため、各橋梁の床版の劣化過程がマルコフ推移確率で表現されることになる。混合指数ハザード関数(39)を用いた場合、混合マルコフ劣化モデルにおいて推定するパラメータは、6つのレーティングそれぞれに対する $\beta_{i,1}$ ,  $\beta_{i,2}$ ,  $\beta_{i,3}$ ( $i = 1, \dots, 6$ )という3つの未知パラメータ、および異質性分散パラメータ $\phi$ の合計19個となる。ここで、混合指数ハザード関数の標準ハザード率として、指数ハザード関数

$$\tilde{\lambda}_i^k = \exp(\beta_{i,1} + \beta_{i,2}x_2^k + \beta_{i,3}x_3^k) \quad (40)$$

$$(i = 1, \dots, 6; k = 1, \dots, 1,481)$$

を用いて定義しよう。指数ハザード関数を用いて標準ハザード率を定義することにより、常にハザード率が正の値をとることが保証される。さらに、標準ハザード率を説明変数の線形和で定義する場合、平均マルコフ推移確率(23a),(23b)を用いて定義される対数尤度関数(29)が、パラメータ値 $\beta_{i,1}$ ,  $\beta_{i,2}$ ,  $\beta_{i,3}$ ( $i = 1, \dots, 6$ )、 $\phi$ に関して1次同次関数となり、パラメータの推定値が発散するという問題が生じる。指数ハザード関数(40)を用いることにより、標準ハザード率が正値をとり、パラメータ値が一意的に決定されることとなる。表-2には以上の手順で推定した混合マルコフ劣化モデルのパラメータの最尤推定量 $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\phi}$ を示している。また、同表には各説明変数の尤度比検定統計量を示している。

以上で推定した混合マルコフ劣化モデルの特性を分析するために、異質性を考慮しない標準的なマルコフ劣化モデル<sup>2)</sup>も推定しよう。マルコフ劣化モデルでは、標準ハザード率(40)を用いることにより、マルコフ推移確率は式(8),(9)で表現される。表-3には、マルコフ劣化モデル(40)の推定結果を示している。表-2と表-3を比較すると、採用された説明変数、および対応するパラメータの最尤推定量 $\hat{\beta}$ は概ね一致している。このことは、異質性パラメータの確率分布が標準ハザード率を平均として分布するように特定化していることを反映している。

つぎに、同データベースの平均交通量と床版面積の平均値0.2275, 0.0411を用いて、混合マルコフ劣化ハザード関数を推定するとともに、期待ハザード率 $E[\lambda_i]$ を求めた。ただし、前述したように、平均交通量、床版面積は全サンプル32,902個の中に含まれる最大値が1となるように基準化した値である。期待ハザード率 $E[\lambda_i]$ は、対象とするRC床版の母集団を $\Theta$ 、母集団 $\Theta$

表-2 混合マルコフ劣化モデルの推定結果

| レーティング         | 定数項           | 平均交通量            | 床版面積             |
|----------------|---------------|------------------|------------------|
|                | $\beta_{i,1}$ | $\beta_{i,2}$    | $\beta_{i,3}$    |
| 1              | -1.0401       | -                | 3.1560<br>(7.7)  |
| 2              | -1.4863       | -                | 3.3308<br>(67.6) |
| 3              | -1.9617       | 0.7166<br>(63.0) | -                |
| 4              | -2.4589       | 0.8705<br>(45.1) | 0.5148<br>(12.9) |
| 5              | -2.3599       | -                | -                |
| 6              | -1.9984       | 1.5473<br>(14.8) | -                |
| 分散パラメータ $\phi$ |               | 5.5373<br>(20.7) |                  |
| 対数尤度           |               | -20,050          |                  |

注) 括弧内は尤度比検定統計量を示している。

表-3 マルコフ劣化モデルの推定結果

| レーティング | 定数項           | 平均交通量            | 床版面積             |
|--------|---------------|------------------|------------------|
|        | $\beta_{i,1}$ | $\beta_{i,2}$    | $\beta_{i,3}$    |
| 1      | -1.1007       | -                | 2.8977<br>(7.6)  |
| 2      | -1.5071       | -                | 3.2029<br>(70.1) |
| 3      | -1.9730       | 0.6969<br>(63.2) | -                |
| 4      | -2.4399       | 0.8451<br>(44.2) | 0.5129<br>(13.4) |
| 5      | -2.3233       | -                | -                |
| 6      | -1.9510       | 1.5439<br>(15.8) | -                |
| 対数尤度   |               | -20,062          |                  |

注) 括弧内は尤度比検定統計量を示している。

における部材特性の分布関数を $\Gamma(\mathbf{x})$ としたとき、

$$E[\lambda_i] = \int_{\Theta} \mathbf{x} \beta_i' d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (41)$$

と表せる。以上の結果を表-4に示す。また、当該レーティングにはじめて到達した時点から、劣化が進展して次のレーティングに進むまでのレーティング期待寿命は式(12)で表される。そこで、全橋梁1,481個に対してレーティング期待寿命 $RMD_i^k$ を求め、その平均値 $E[RMD_i^k]$ を算出した。その結果を表-4に併記している。以上のようにして求めた期待ハザード率、およびレーティング期待寿命を用いて描いた劣化曲線を図-4に示す。図-4に描かれている劣化曲線は、平均交通量の平均0.2275、および床版面積の平均0.0411を用いたときの平均的な劣化曲線を示している。また、表-4と図-4には、マルコフ劣化モデルに基づいて算出した期待ハザード率、期待寿命および劣化曲線を併せて示している。特に、図-4に示すように、2つのモデルを用いて求めた平均的な劣化曲線は極めて類似している。



表-4 レーティング期待寿命  
混合マルコフ劣化モデル

| レーティング | $E[\lambda_i]$ | $E[RMD_i^k]$ (年) |
|--------|----------------|------------------|
| 1      | 0.4024         | 2.49             |
| 2      | 0.2594         | 3.86             |
| 3      | 0.1655         | 6.04             |
| 4      | 0.1065         | 9.39             |
| 5      | 0.0944         | 10.59            |
| 6      | 0.1927         | 5.19             |

マルコフ劣化モデル

| レーティング | $E[\tilde{\lambda}_i]$ | $E[R\tilde{M}D_i^k]$ (年) |
|--------|------------------------|--------------------------|
| 1      | 0.3747                 | 2.67                     |
| 2      | 0.2527                 | 3.96                     |
| 3      | 0.1629                 | 6.14                     |
| 4      | 0.1079                 | 9.27                     |
| 5      | 0.0979                 | 10.21                    |
| 6      | 0.2019                 | 4.95                     |

注) 平均交通量の平均0.2275, および床版面積の平均0.0411を用いたときの平均的な劣化曲線を示している。

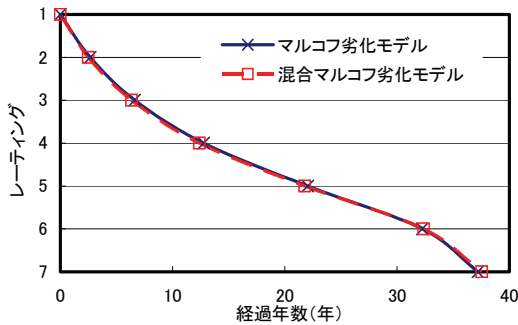


図-4 ベンチマーキング劣化曲線

また、2つのモデルを用いて推定した期待寿命は、それぞれ37.55年、及び37.19年であり、大きな差異はない。すなわち、平均的な劣化過程をモデル化するためには、マルコフ劣化モデル<sup>2)</sup>で十分であり、ハザード率の異質性を考慮する必要はない。このことは、異質性パラメータの確率分布  $f(\epsilon^k)$  の平均を1に基準化しており、真のハザード率  $\lambda_i^k$  が標準ハザード率  $\tilde{\lambda}_i^k$  を平均とするように分布することを想定しているためである。一方、平均的な劣化曲線では表現できないような個別橋梁に特有な劣化速度の差異を評価するためには混合マルコフ劣化モデルが必要となる。標準ハザード率を用いて定義される平均的な劣化曲線は、個別橋梁の劣化速度を相対評価するための基準となる曲線であり、本研究ではベンチマーキング劣化曲線と呼ぶこととする。標準ハザード率が、各橋梁の特性(平均交通量の平均、床版面積の平均)の関数として表現されることを考慮すれば、各橋梁特性と対応したベンチマーキング劣化曲線を定義できることに留意して欲しい。

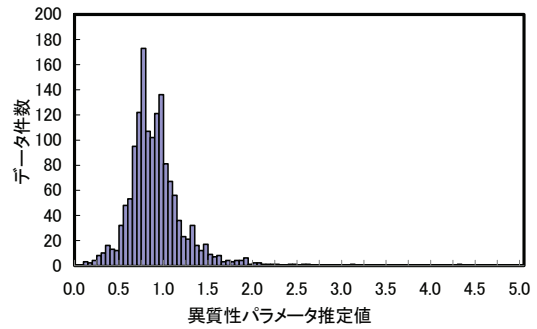


図-5 異質性パラメータの推定結果

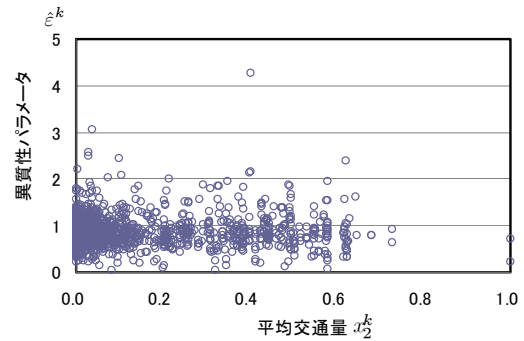


図-6 異質性パラメータと平均交通量の関係

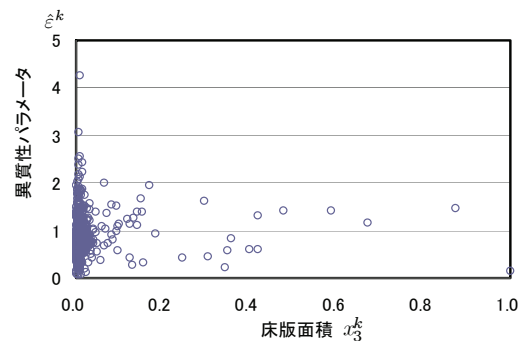


図-7 異質性パラメータと床版面積の関係

### (3) 推定結果と考察

5.(2)では、混合マルコフ劣化モデルを用いて、6つのレーティングに対する各特性ベクトルの未知パラメータ  $\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \beta_{i,3} (i=1, \dots, 6)$ , および異質性分散パラメータ  $\phi$  の最尤推定量を求めた。さらに、以上のパラメータの推定値と、各橋梁特性の観測値を用いれば、それぞれの橋梁特性に応じたベンチマーキング劣化曲線(図-4参照)を作成することが可能である。さらに、橋梁  $k (k=1, \dots, 1,481)$  の異質性パラメータ  $\epsilon^k$  を推定することにより、当該橋梁の劣化過程の実測値に基づいた劣化曲線を作成することができる。このように作成した劣化曲線と、同一の構造・材料特性を持つ橋梁のベンチマーキング劣化曲線を比較することにより、当該橋梁の劣化速度を相対評価することが可能

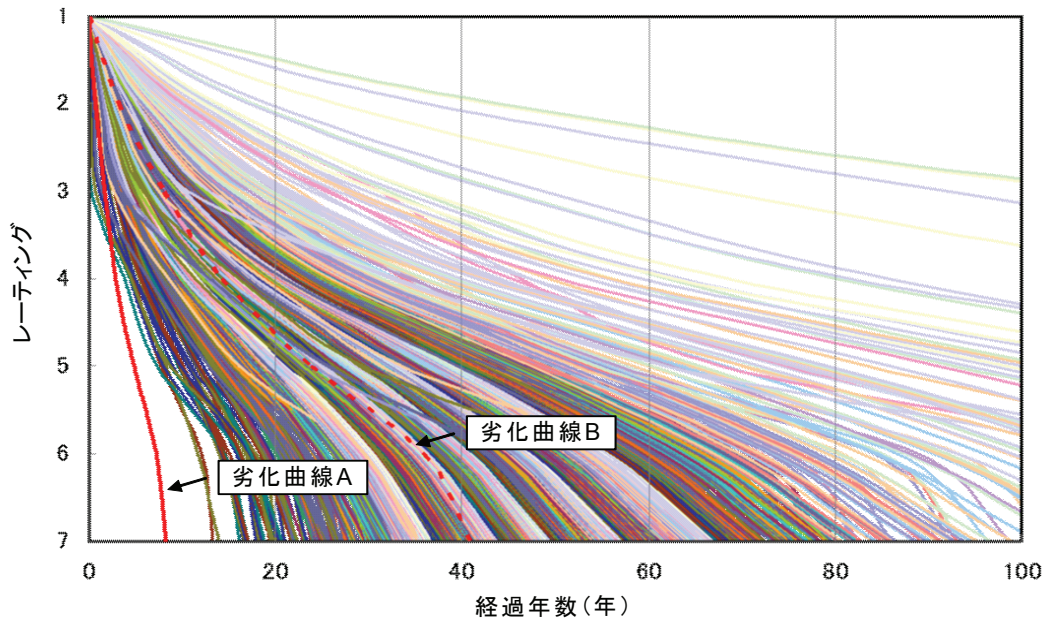


図-8 橋梁別の劣化曲線

注) 図中、実線で描かれた劣化曲線Aは、劣化の進展が著しく速いMiller Highway 高架橋、破線で描かれた劣化曲線Bは、平均的な劣化特性を示す278I 高架橋と対応している。

となる。

式(34)を用いて、対象とするすべての橋梁の異質性パラメータを推定した。図-5は、異質性パラメータの推定値の頻度分布を表している。異質性パラメータの頻度分布の平均は0.862、分散は0.102である。また、対象とする橋梁の中で、異質性パラメータの最小値は0.064、最大値は4.266であった。また、異質性分散パラメータの推定結果より、異質性パラメータは平均1、分散0.181(異質性分散パラメータ5.537の逆数)のガンマ分布に従うことになる。異質性パラメータは観測不可能な劣化要因や各橋梁の個別的劣化特性を説明する役割を果たしており、異質性パラメータのばらつき(分散)により、採用した説明変数によって劣化過程をどの程度説明できているかを検証することができる。NY市の橋梁の場合、異質性パラメータには、かなりの程度散らばりが見られる。特に、異質性パラメータの最大値が4.266である橋梁に関しては、劣化速度を表すハザード率が、ベンチマーキングと比較して4倍以上あることを意味している。

図-6、図-7は、それぞれ異質性パラメータと平均交通量、および床版面積の関係を分析した結果を表している。ただし、同図の横軸は、総サンプルの中で、交通量、床版面積の最大値が1となるように基準化している。異質性パラメータと、平均交通量、床版面積の間には顕著な関係を見出せない。したがって、異質性パラメータの差異は、混合指数ハザード関数の説明

変数として取り上げなかった個別橋梁の特性の差異に起因していると考えられる。

さらに、1,481橋すべてに対して、RC床版の劣化曲線を求めた。これらの劣化曲線を一括して図-8に示している。本研究で提案した混合マルコフ劣化モデルを用いることにより、1,481橋それぞれのRC床版の劣化曲線を求めることが可能となる。図-8に示すように、期待寿命が10年以下のRC床版から、100年以上のRC床版が存在することがわかる。図-4に示したベンチマーキング劣化曲線の期待寿命が37.55年であったことを踏まえると、RC床版の期待寿命は橋梁ごとに非常に大きな差異が存在することが理解できる。

つぎに推定精度を実際の目視検査結果との比較を通して検証してみよう。図-9、図-10は劣化速度の速い橋梁(Miller Highway 高架橋)と平均的な劣化速度を示している橋梁(278I 高架橋)を抽出し、劣化曲線と目視検査の結果をプロットして劣化状況を確認したグラフである。なお、これらの2橋は、表-5に示すように、ほぼ同一の平均交通量と床版面積を有している。また、Miller Highway 高架橋を構成する床版数は64、278I 高架橋を構成する床版数は39である。図中の凡例の数値はレーティングの推移を示しており、例えば「1-1-2」はこれまでに3回の目視点検が行われ、初回のレーティングが1、次回もレーティングが1、3回目にレーティングが2に推移したことを示している。凡例中の数値の組み合わせを1サンプルとすると、今

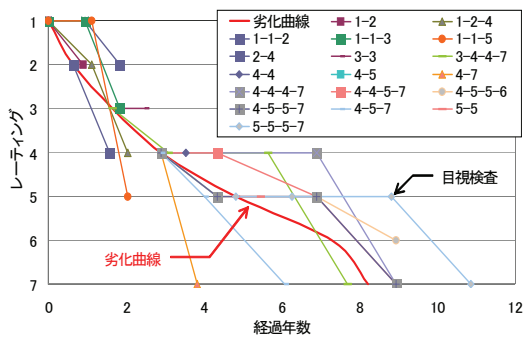


図-9 Miller Highway 高架橋の劣化特性

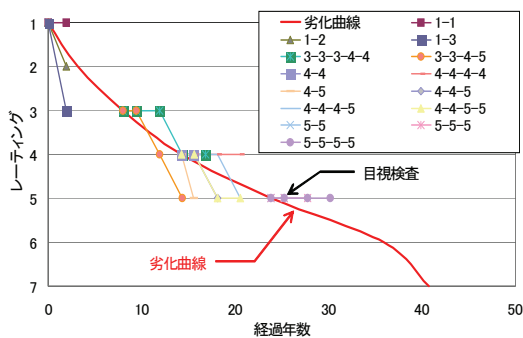


図-10 278I 高架橋の劣化特性

表-5 橋梁特性

| 橋梁名      | 寿命 (年) | 平均交通量  | 床版面積   |
|----------|--------|--------|--------|
| M.H. 高架橋 | 8.2    | 0.4013 | 0.0098 |
| 278I 高架橋 | 40.8   | 0.3716 | 0.0109 |

回の解析では図中に示す18と14通りのレーティングの推移の組み合わせが、延べ135, 78サンプル得られた。図-9に示すように、Miller Highway 高架橋の劣化速度は大きく、8.2年でレーティングが1から7へ推移している。同図には、同橋を構成するRC床版の目視点検の結果と、同橋の期待値パス（平均的な劣化曲線）の関係を示している。同じく、図-10は、Miller Highway 高架橋と同様な平均交通量、床版面積を有する278I 高架橋をとりあげ、同橋を対象とした目視点検結果と期待値パスの関係をプロットした結果である。いずれの橋梁においても、目視点検の結果が期待値パスを中心として推移しており、期待値パスがそれぞれの橋梁のRC床版の平均的な劣化パターンを表現していることが理解できる。しかし、Miller Highway 高架橋の異質性パラメータの推定値が4.266であるのに対して、278I 高架橋の推定値は0.8734となっており、これら2つの橋梁の劣化速度が顕著に異なることが理解できる。

標準ハザード率を用いたマルコフ劣化モデルでは、このような異質性の効果を分析することが不可能である。

特に、橋梁個々の具体的な補修・更新計画や、橋梁補修の優先順位を決定するようなマイクロレベルの橋梁マネジメント問題では、個別橋梁の劣化ハザード率の異質性評価が重要な課題となる。本研究で提案したベンチマーキング劣化曲線の作成と、個別橋梁の劣化ハザード率の相対評価の方法論は、マイクロレベルの橋梁マネジメントの精緻化、高度化に貢献するものと期待できる。

つぎに、レーティング3の状態に着目し、標準ハザード率と混合指数ハザード率の分布状態を求めた。それらの結果を、それぞれ図-11と図-12に示している。レーティング3は、劣化の初期段階を終えた直後であり、劣化進展の速度を見極め、具体的な維持管理対策を考える最も重要なレーティングである。各橋梁の特性値（平均交通量、床版面積）の違いが、図-11に示すような標準ハザード率の分布に反映されている。一方、異質性パラメータの分布は、図-5に示したとおりである。これら2つの図を比較することにより、標準ハザード率の分布より異質性パラメータの分布の方が散らばりが大きいことが理解できる。図-12は、混合指数ハザード率の頻度分布を示している。標準ハザード率と異質性パラメータの分布を反映して、各橋梁の混合指数ハザード率には、かなりの程度の差異が存在することが読み取れる。その結果、図-8に示したように、各橋梁の劣化曲線に大きな差異が生じることになる。これまで、RC床版の劣化を加速する要因として大型車交通量が問題視されることが多かった。本適用事例では、データの制約上、大型車交通量の代理指標として、平均交通量を用いている。しかし、NY市の橋梁に関する限り、平均交通量が劣化速度に及ぼす影響よりも、個別橋梁特有の要因の方が劣化速度に多大な影響を及ぼしていることが理解できる。橋梁マネジメントの立場からは、ベンチマーキング劣化曲線と比較して、劣化速度が著しく早い橋梁を抽出し、その原因を究明することが必要である。そのためには、橋梁のハザード率の相対評価を行うことが重要となる。

#### (4) ハザード率の相対評価

標準ハザード率と異質性パラメータの推定値を用いて、個別橋梁のRC床版の劣化速度を相対評価しよう。図-13は、レーティング3における標準ハザード率の推定値 $\hat{\lambda}_3^k$ と異質性パラメータの推定値 $\hat{\epsilon}^k$ の関係を示している。標準ハザード率の全サンプル平均値（平均標準ハザード率と呼ぶ）を求めれば $AVE(\hat{\lambda}_3) = 0.2351$ である。図-13の横軸は、各橋梁の標準ハザード率を平均標準ハザード率で基準化した値 $\hat{\lambda}_3^k / AVE(\hat{\lambda}_3)$ を示している。標準ハザード関数(40)の定数項が $\beta_{i,3} = -1.9730$ となっており、同図に示すように標準ハザード率の推定値に下限値 $\hat{\lambda}_3 = \exp(-1.9617)$ が存在している。こ



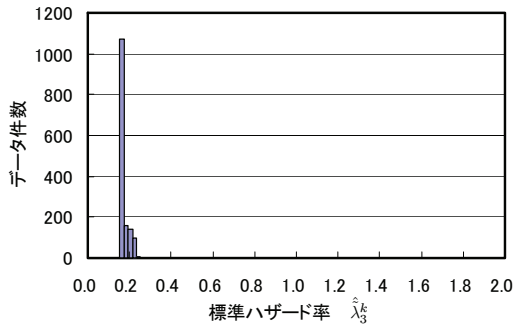


図-1.1 標準ハザード率の頻度分布

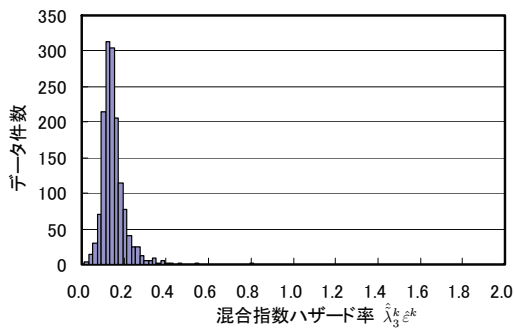


図-1.2 混合指数ハザード率の頻度分布

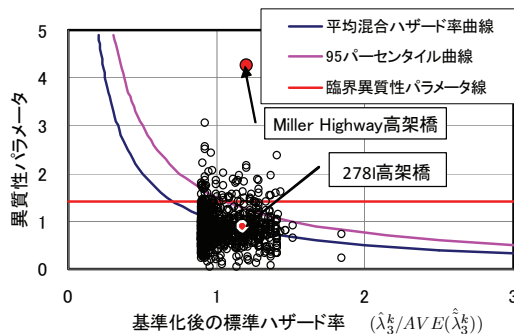


図-1.3 ハザード率の相対評価

ここで、異質性パラメータの推定値に基づいて、信頼域を95%とする重点監視集合 $\bar{\Omega}_{0.05}$ を定義しよう。信頼域を95%とした場合、臨界的異質性パラメータ値 $\bar{\varepsilon}_{0.05}$ は1.4129となる。図-1.3には、横軸に平行となる実線 $\bar{\varepsilon}_{0.05} = 1.4129$ を示している。この実線より上方に位置するサンプルが、重点監視集合 $\bar{\Omega}_{0.05}$ に含まれる。

式(13)に示す通り、橋梁 $k$ の劣化速度（混合指数ハザード率）の推定値 $\hat{\lambda}_3^k$ は、標準ハザード率の推定値 $\hat{\lambda}_3^k$ と異質性パラメータの推定値 $\hat{\varepsilon}^k$ の積で定義される。平均標準ハザード率（ $AVE(\hat{\lambda}_3) = 0.2351$ ）と異質性パラメータの平均値（ $AVE(\hat{\varepsilon}) = 1.00$ ）の積により、平均混合ハザード率 $AVE(\hat{\lambda}_3) = AVE(\hat{\lambda}_3) \times AVE(\hat{\varepsilon}) =$

$0.2351 \times 1 = 0.2351$ を定義しよう。図-1.3には、サンプルの標準ハザード率の平均値と異質性パラメータの積が0.2351となる曲線を示している。この曲線より上方に位置する橋梁は、混合ハザード率が全サンプル平均より大きい橋梁であることを表している。逆に、この曲線より下に位置するサンプルは平均よりも劣化速度が遅く、寿命が長いと評価することができる。さらに、同図には標準ハザード率と異質性パラメータの積の95パーセンタイルの曲線も併せて示している。95パーセントタイル曲線より上に位置する橋梁が重点監視集合 $\bar{\Omega}_{0.05}$ に属することになる。本適用事例では、管理水準として95%をとりあげているが、このように管理者が劣化進展の早いRC床版の上位 $\alpha\%$ を決定することにより、重点的にモニタリングすべきRC床版を効率的に抽出することができる。

いま、図中のサンプル278I高架橋に着目しよう。278I高架橋の異質性パラメータの推定値は0.8734である、また、平均交通量0.3716、床版面積0.0109であり、標準ハザード率の推定値は0.1835となる。このことより、278I高架橋は平均的な劣化特性を有していると評価できる。図-1.4には、278I高架橋のRC床版をとりあげ、確率的劣化分布（レーティングの確率分布）の経年的変化状態を、混合ハザード率を用いたマルコフ劣化モデルにより分析した結果を示している。一方、重点監視集合 $\bar{\Omega}_{0.05}$ 、 $\bar{\Omega}_{0.05}$ の双方に属するMiller Highway高架橋（図-1.3参照）に着目しよう。この橋梁における異質性パラメータの推定値は4.266である。また、平均交通量は0.4013、床版面積は0.0098であり、標準ハザード率の推定値は0.1875である。本橋梁の確率的劣化分布の経年的変化パターンを分析した結果を図-1.5に示している。図-1.4に示すように、平均的な劣化特性を有する278I高架橋では、供用開始後10年を経過した時点で、最悪の劣化状態を表すレーティング7の状態の床版が出現しはじめる。しかし、重点監視対象のMiller Highway高架橋では、供用後10年を経過した時点で70%以上のRC床版がレーティング7の状態に到達している。このように混合ハザード率の大きさにより、RC床版の確率的劣化特性に大きな差異が現れることが理解できる。

Miller Highway高架橋のように重点監視の対象となる橋梁に関しては、センサー等による常時モニタリングを実施する等の対応が必要となろう。また、相対評価結果は、橋梁補修や重点対策の優先順位を決定するための重要な情報になりうると考える。さらに、重点監視集合に含まれるRC床版グループに共通する要因を探ることにより、あるいは反対に最も劣化進展の遅いRC床版の特徴を検証することにより、効果的な補修工法の開発や、得られた知見の新設設計へのフィードバック

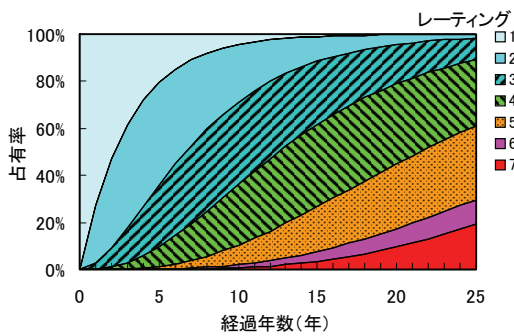


図-1-4 278I 高架橋の確率的劣化分布

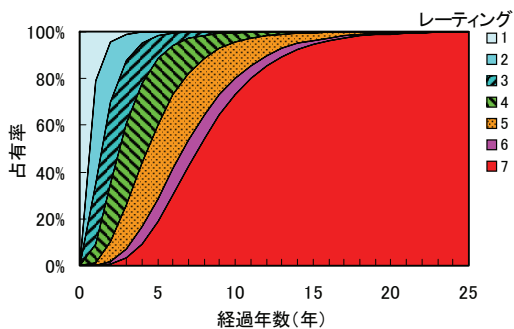


図-1-5 Miller Highway 高架橋の確率的劣化分布

クが可能になる。また、新材料や新工法の劣化抑制効果を、当該サンプルとベンチマークとの比較を通して実証的に検証することができる。以上のように、ベンチマーキング劣化曲線の作成と、それに基づいた相対的な事後評価により、土木施設の長寿命化に資する継続的なアセットマネジメントを構築することが可能となる。また、現在施設管理の目視検査等は土木施設により一律に検査周期が決定されているが、上述の分析により、実態に即した柔軟な検査体制を整備することも可能となろう。

## 6. おわりに

本研究では、土木施設の劣化過程が、同一の構造・仕様特性や使用条件の下であっても、施工時の品質や観測不可能な要因に起因して多様に異なることに着目し、ハザード率の異質性を考慮した混合マルコフ劣化モデルを定式化した。また、ハザード率の確率分布をガンマ分布に特定化し、個別要素の劣化過程を表すマルコフ推移確率を推定する方法論を提案した。さらに、標準的な劣化過程を表すベンチマーキング劣化曲線と、それに基づいて個別要素の劣化速度を相対評価する方法論を提案した。また、実橋の目視検査データに基づいて

混合マルコフ劣化モデルを推定し、個別橋梁要素の劣化速度の相対評価を試みた。以上の実証分析を通じて、本研究で提案した混合マルコフ劣化モデルの有効性は検証しえたと考えるが、本モデルの実用性を向上させるうえで、以下のような課題が今後に残されている。第1に、本研究では異質性パラメータが標準ハザード率を期待値とするガンマ分布に従うことを仮定した。しかし、現実の異質性パラメータの確率分布が、ガンマ分布以外の確率分布に従う可能性を否定できない。異質性パラメータの確率分布に関する特定化誤差に関する検討が必要である。さらに、異質性分布の関数形を特定化しないノンパラメトリックな方法論を開発することが必要である。第2に、新材料や新工法の導入など、技術革新の成果が、土木施設の長寿命化に貢献しえたかどうかを評価する方法論を開発する必要がある。本研究では、目視検査データの母集団に対して標準的ハザード率を設定する方法を採用した。しかし、技術評価を実施するためには、best practiceを表すハザード率の下限値（もっとも劣化速度が遅くなるようなハザード率）を理論的に設定できれば理想的である。それが不可能な場合においても、たとえば、確率的フロンティア分析を導入することにより、目視検査データの中から下限値を統計的に推定する方法論を開発することは可能である。第3に、具体的な土木施設のアセットマネジメントにおいて、本研究で提案した劣化速度の個別評価の結果を用いて、土木施設の維持補修計画を更新・修正するための方法論を開発することが必要である。マクロレベルのアセットマネジメントにおいて、目視検査の結果を用いてライフサイクル費用の評価結果を見直すことが求められる。このような場合、本研究で提案した混合マルコフ劣化モデルを用いて、マルコフ推移確率を修正することが可能であり、土木施設マネジメントシステムの部分モジュールとして、マルコフ推移確率の補正機能を追加することが有用である。また、ミクロレベルでのアセットマネジメントにおいても、混合マルコフ劣化モデルを用いて、土木施設の余寿命を検討したり、劣化速度の個別的検討のための有用な基礎情報を作成することができる。

本研究を遂行するに際して、NY市交通局のBojidar Yanev博士から目視検査データを提供して頂いた。ここに記して感謝の意を表す。なお、本研究で得られた知見は、著者ら独自のものであり、NY市やその他のいかなる団体の正式な見解ではないことを付記しておく。また、本研究の一部（貝戸清之担当分）は文部科学省科学技術調整振興費「若手研究者の自立的研究環境整備促進」事業により大阪大学大学院工学研究科グローバル若手研究者フロンティア研究拠点において実施された。

## 参考文献

- 1) 小林潔司, 上田孝行: インフラストラクチャのマネジメント: 研究展望, 土木学会論文集, No.744/IV-61, pp.15-27, 2003.
- 2) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 3) 青木一也, 若林伸幸, 大和田慶, 小林潔司: 橋梁マネジメントシステムアプリケーション, 土木情報利用技術論文集, Vol.14, pp.199-210, 2005.
- 4) 保田敬, 小林潔司: BMSにおける点検結果と状態推移確率がLCCに及ぼす影響, 建設マネジメント論文集, Vol.11, pp.111-122, 2004.
- 5) Lee, T.C., Judge, G.G. and Zellner, A.: *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data*, Amsterdam, North-Holland, 1970.
- 6) 杉崎光一, 貝戸清之, 小林潔司: 目視検査周期の不均一性を考慮した統計的劣化予測手法の構築, 構造工学論文集, Vol.52A, pp.781-790, 2006.
- 7) 貝戸清之, 阿部允, 藤野陽三: 実測データに基づく構造物の劣化予測, 土木学会論文集, No.744/IV-61, pp.29-38, 2003.
- 8) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 9) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 10) Mishalani, R. and Madanat S.: Computation of infrastructure transition probabilities using stochastic duration models, *ASCE Journal of Infrastructure Systems*, Vol.8, No.4, 2002.
- 11) 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司: 多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2005.
- 12) 貝戸清之, 熊田一彦, 林秀和, 小林潔司: 階層型指数劣化ハザードモデルによる舗装ひび割れ過程のモデル化, 土木学会論文集F, Vol.63, pp.386-402, 2007.
- 13) 津田尚胤, 貝戸清之, 山本浩司, 小林潔司: ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推定法, 土木学会論文集, No.798/VI-68, pp.125-136, 2006.
- 14) 貝戸清之, 小林潔司: マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定法, 土木学会論文集A, Vol.63, No.2, pp.336-355, 2007.
- 15) 小林潔司, 熊田一彦, 佐藤正和, 岩崎洋一郎, 青木一也: サンプル欠損を考慮した舗装劣化予測モデル, 土木学会論文集F, Vol.63, No.1, pp.1-15, 2007.
- 16) 貝戸清之, 山本浩司, 小濱健吾, 岡田貢一, 小林潔司: ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル: 交通管制システムへの適用, 土木学会論文集 (投稿中)
- 17) Titterton, D.M., Smithe, A.F.M. and Makov, U.E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons., 1985.
- 18) Gourieroux, C. and Visser, M.: A count data model with unobserved heterogeneity, *Journal of Econometrics*, Vol.79, pp.247-268, 1986.
- 19) Cruz, M.G.: *Modelling, Measuring and Hedging Operational Risk*, Wiley, 2002.
- 20) Mikosch, T.: *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer, 2000.
- 21) McNeil, J.A., Frey, R. and Embrechts, P.: *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, 2005
- 22) 貝戸清之, 小林潔司, 加藤俊昌, 生田紀子: 道路施設の巡回頻度と障害物発生リスク, 土木学会論文集F, Vol.63, No.1, pp. 16-34, 2007.
- 23) Hooke, R. and Jeeves, T.A.: Direct search solution of numerical and statistical problems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol.8, pp.212-229, 1961.
- 24) 岩田暁一: 計量経済学, 有斐閣, 1982.
- 25) 森棟公夫: 計量経済学, 東洋経済新報社, 1999.
- 26) State of New York, Department of Transportation: *Bridge Inspection Manual*, 1997.
- 27) 貝戸清之: ニューヨーク市における橋梁維持管理マネジメントの現状, 橋梁と基礎, Vol.36, No.10, pp.37-41, 2002.

(平成19年12月4日 受付)

## DISAGGREGATED HAZARD RATES EVALUATION AND BENCH-MARKING

Kiyoyuki KAITO, Kengo OBAMA, Koichi OKADA and Kiyoshi KOBAYASHI

The deterioration processes of civil infrastructures are heterogeneous due to unobservable factors even under the same structural and environmental conditions. In this paper, a Markov hazard model is formulated to characterize the average hazard rates, and is extended to a mixed Markov hazard model by incorporating the heterogeneity in hazard rates. By doing so, the benchmarking model to express the average deterioration processes and the statistical methodology for comparative assessment of the hazard rates of the individual facilities is also presented. The applicability of the methodology presented in this paper is examined against the real world data concerning the bridge members.