劣化過程の多様性を考慮した劣化予測モデル：
道路舗装への適用

平成２０年３月３日

京都大学大学院工学研究科
都市社会工学専攻
林　秀和

要　旨

社会資本のアセットマネジメントでは，ライフサイクル費用の低減化が図れるような最適補修戦略を求めることが重要な課題である．その上で，将来時刻における土木施設の補修需要を予測し，土木施設の維持補修のために必要となる予算計画を策定することが必要となる．アセットマネジメントを実施する上で，土木施設の劣化予測モデルはライフサイクル費用や補修需要を推計するために重要な役割を果たす.

本研究では，劣化状態が複数のタイプかつ複数のレーティングで表現されるような土木施設を対象とし，過去の目視検査結果を用いて，劣化予測モデルを統計的に推定する手法論を提案する．その際，信頼性解析の分野で多用されるハザードモデルを用いて土木施設の劣化過程を表現する．基本モデルとして，各劣化状態間の直接的な推移を表現した階層型指数劣化ハザードモデルを提案する．拡張モデルとして，各劣化タイプがそれぞれ独立に進行し，もっとも劣化の進行した劣化タイプが観測されるという競合的劣化ハザードモデルを提案する．さらに，点検データに測定誤差が存在する場合を対象として，測定誤差を解消し，劣化予測を可能とする隠れマルコフ劣化モデルを提案する.

目　次

1　序論

1.1　本研究の背景

社会資本は，国土の保全，産業活動の基盤，生活環境の質的向上など多方面にわたって社会・経済の発展に寄与する国民共有の資産（アセット）であり，我々はその有効活用と保全を図り，将来世代に継承していく義務がある[1)].

わが国では明治期以来，各種の社会資本が整備され，国民経済の発展に多大な貢献を成し遂げた．現在に至るまでそのストックは膨大な量に及んでいる．土木学会アセットマネジメント研究小委員会で実施したアンケート調査によると，各都道府県が管理している社会資本の量は，道路延長が平均約3,500km，橋梁数が平均約2,700ヶ所，トンネル数が平均約100ヶ所であり，5000ヶ所を超える橋梁を管理している自治体もある[2)]．しかし，戦後急速に整備された社会資本の中には，時代の推移やそれにともなう技術の進歩から，構造的な劣化や経済的・機能的な陳腐化の進行により，早急に維持・補修・補強・更新を必要とするものも少なくない．特に構造的な劣化は，土木施設によっては急を要する問題であり，一歩間違えれば大惨事となりかねない．例としては，近年では2007年8月1日に起きた，アメリカのミネソタ州ミネアポリスにおける落橋事故は記憶に新しいだろう．このような事故をこれ以上起こさないためにも，今後の修繕需要はさらに増大すると予想される．また，社会資本は種類によっては代替・停止が不可能である場合が少なくない．例としては，電車や主要国道などが挙げられよう．このような社会資本は，国民の生活の生命線であり，サービスを停止することができない．このため，その補修や更新の方法・タイミングを策定することも今後の大きな課題となろう．

一方，上記の物理的な問題に加え，社会資本のマネジメントは経済的な問題も抱えている．わが国は2005年を境に総人口が減少しており，若干の増減はあるものの，巨視的に見ると今後も減少傾向は継続すると考えられている．また，2007年以降団塊世代が定年を迎えるなど，わが国は着実に高齢化の道を歩んでいる．少子高齢化社会の到来による税収減少や社会保障費用の増大により，今後，社会資本整備の財源基盤が一層縮減することは明らかである．こうした状況下で，新規の社会資本整備のニーズに応えつつ，既存の社会資本を有効に活用するためには，社会資本を効率的に維持・補修・補強・更新していくためのアセットマネジメント技術の高度化および最適な補修計画作成のためのアセットマネジメントシステムの導入が求められている．

こうした背景の下，我が国でもアセットマネジメントに関する様々な検討・提案が行われてきた．例えば，西川は道路管理者としての立場から，橋の寿命を決定する要因を設計要因，施工要因，維持管理要因に分類し，それらの要因に対して防止対策を採ることで，「工学的永久橋」が可能であるとし[3)]，鋼橋について「ミニマムメンテナンス橋」のプロトタイプを示している[4)]．関は，1996年当時の維持管理に関する研究や技術の現状を取りま

とめている[5]．土木学会論文集でも,「アセットマネジメント研究のフロンティア」と題して，特に劣化予測，マネジメント戦略検討のための分析モデルに焦点を当て，特集を組んでいる[6]．また，マネジメントシステムに関しても研究の蓄積がなされ，実用化まで後一歩の所まで来ている[7)−12]．土木を取り巻く業界の動きとしては，土木学会がコンクリート標準示方書[維持管理編][13]を制定し，維持管理を設計，施工に優るとも劣らない行為として位置づけ，点検から対策に至る維持管理の体系を明確に示した．日本道路協会は平成14年3月，道路橋示方書[14]を改定し，仕様規定型から性能規定型への移行を明示し，これまでの規格や基準に適合しないため利用が困難であった新材料，新しい構造形式・施工法の導入を容易にし，設計の自由度が増すことによるコストダウンへの道を開いた．橋梁の総合的な維持管理を目的とした，点検の体系化の動きも見られる[15]．2003年には，国土交通省が，土木構造物の健全度判定，診断結果から対策工法を選定し，限られた予算内で最大の効果を得るためのアセットマネジメントシステム構築の必要性を指摘し，その基本方針，プロセスを示している[16]．今後，その基本方針の下，各種マネジメント技術の高度化，総合的なアセットマネジメントシステムの構築が期待される．

土木施設のアセットマネジメントでは，ライフサイクルコストの低減化が図れるような最適補修戦略を求めることが重要な課題である．最適補修戦略の重要な構成要素として，対策箇所・工法の選定とその実施タイミング，点検箇所の選定と点検頻度の最適化が挙げられる．いずれの最適化においても，将来時刻における土木施設の補修需要を精度よく予測することが必要となる．本研究では，マネジメント技術の重要な一要素であり，現在アセットマネジメント研究の根幹を担っている，土木施設の劣化予測モデルに焦点を絞り，論文を取りまとめる．

1.2　従来の研究概要

土木施設の劣化予測に関しては，数多くの研究事例がある．土木施設の劣化予測の手法は物理的劣化予測手法と統計的劣化予測手法とに大別できる．本節では，本研究で用いている統計的劣化予測の既存研究について言及する．統計的な劣化予測モデルは，多くの劣化サンプルから，劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化することを目的とする．土木施設の統計的劣化予測モデルとしてマルコフ劣化モデルが提案されている．マルコフ推移確率の推計方法として，1) 集計的推計方法と，2) 非集計的推計方法が存在する．前者の方法は，ある一定の測定期間の中で生起した健全度間の推移状態に関するデータに基づいて，マルコフ推移確率を直接推計することを目的とする．もっとも単純な算定方法は，健全度間の推移状態に関する実データの数え上げにより，推移確率を直接定義する方法[18]である．これに対して，最尤法により，推移確率を推計する方法[17]も提案されている．マルコフ推移確率は，推移確率を定義する測定間隔に依存する．現実に測定される健全度データには，測定間隔が異なる多様なデータが混在している場合が多い．この場合，実データ

が測定された測定間隔の差異がもたらす影響を補正することが必要となる．杉崎等は，異なる測定間隔を有する目視点検データを用いて，マルコフ推移確率を集計的に推計する方法を提案している[19]．しかし，このような集計的劣化予測方法では，個々の施設が置かれている使用環境や，施設が有する構造的，機能的特性と推移確率との関係をモデル化できないという限界がある．

これに対して，非集計的推計方法は，個々の土木施設の劣化過程に関する情報に基づいて，その背後にある劣化過程の統計的規則性を推計する方法である．このような非集計的推計方法として，貝戸等[20]は，ニューヨーク市における橋梁の目視検査データを用いて，橋梁の劣化速度に着目した平均劣化曲線の算出方法を検討している．また，劣化速度を確率変数と捉えて，過去の検査履歴を反映したマルコフ推移確率の推定方法を提案した．その後，非集計的推計方法は，ハザードモデルの適用により，飛躍的な発展を遂げている．その中で，青木等は，ワイブルハザードモデルを用いて，トンネル照明の寿命解析を行っている[21]．Mishalani and Madanat[22]は，2つの隣接する健全度のみを対象として，マルコフ推移確率を指数ハザードモデルを用いて表現する方法を提案した．これとは独立に，津田等[23]は，2つ以上の任意の健全度間における推移状態を表現する多段階指数ハザードモデルを提案し，マルコフ推移確率を推計する一般的な方法論を提案した．その後，マルコフ推移確率が過去の記憶を有する非斉次マルコフ推移確率を推計するための多段階ワイブル劣化ハザードモデル[24]が提案されている．また，マルコフ推移確率の推計方法に関しては，測定データが非常に少ない段階で，技術者の経験情報と測定結果を結合してマルコフ推移確率を推計するベイズ推計モデル[25],[26]，予防補修により測定データが欠損することにより発生する欠損バイアスを補正する方法[27]，ハザード率の異質性を考慮したランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル[28]が提案されている．以上の方法は，いずれも測定結果に誤差が存在しない場合を想定したものである．しかし，これらのモデルはいずれも単一の健全度指標を用いて劣化過程を記述することを目的としており，複数の状態変数で記述されるような劣化過程を対象としていない．しかし，土木施設においては複数の劣化現象が混合的に進行することが少なくない．ここで，対象とする土木施設として道路舗装に注目しよう．道路舗装の劣化現象の中でも，ひび割れの進行過程は複雑である．一般に，道路舗装の劣化メカニズムの相違により，縦ひび割れ，横ひび割れ，面ひび割れ，ポットホール等に代表されるように，ひび割れは多様な形態で発生する．さらに，ひび割れ形態により，道路舗装の劣化メカニズムが異なる場合が多い．道路舗装の維持補修政策を検討する上で，ひび割れの発生形態に着目した道路舗装の劣化過程の時間管理を行うことが重要である．しかし，著者の知る限り，このようなひび割れ発生形態の多様性に着目して，ひび割れ進行過程を分析した研究事例は見当たらない．本研究では，このような劣化過程の多様性に焦点を当てて研究を進める．さらに，土木施設においては，劣化過程の多様性にともない，劣化状態の測定結果に誤差が生じる場合が増加している．測定誤差の中には，

計測誤差のようなランダム誤差のほかにも,「対象とする施設に存在する劣化事象の中から,当該施設の劣化度をどの劣化事象で代表させるか」という代表問題により発生するシステム誤差が存在する．特に，舗装のような土木施設では，ひび割れ，わだち，非平坦性等といった劣化事象が膨大な数に及ぶため，路面性状調査において，常にもっとも損傷度が進んだ劣化事象が特定されるわけではない．このような代表問題による測定誤差が発生する場合，路面性状調査における測定結果に基づいたマルコフ劣化モデルの推計結果にシステム的なバイアスが発生する．本研究では，このような測定誤差にも注目して研究を進める．

1.3　本研究の目的

本研究では，信頼性解析を始めとして，多くの分野で統計的予測モデルとして用いられているハザードモデルにより劣化過程を表現する．多段階劣化ハザードモデルを用いて，施設の劣化状態を，単一の劣化現象に対する複数の健全度を用いて表現することが可能である[23),24)]．しかし，土木施設の中には，施設の劣化状態を複数の劣化現象を用いて表現する場合が少なくない．特に，道路舗装の劣化過程は，劣化メカニズムが異なる多様な劣化現象が同時に生起するという特徴がある．このような複合的な劣化過程を，単一の劣化現象を対象としたハザードモデルを用いて記述することには限界があった．

このような観点から，本研究では，道路舗装に発生するひび割れの状態を損傷度とひび割れタイプという2種類の離散的状態変数を用いて表現し，複数のタイプのひび割れ過程の進行を同時に考慮したようなモデルを提案する．また，本研究では，モデルの骨子となるハザードモデルには，その操作性の良さや推計コストを考慮し，多段階指数劣化ハザードモデル[23)]を採用する．さらに，ハザードモデルを推定する際に，土木施設の構造特性や使用環境など，個々のミクロ情報を反映させ，非集計的な劣化予測を行う．

まず，多様な道路舗装のひび割れ過程を，複数のひび割れタイプにわたり多段階に損傷度が進行していくような階層的ネットワーク型劣化過程として記述する．つまり，ひび割れ進行過程を，垂直的・水平的な推移関係を同時に有する確率過程としてモデル化する．同一ひび割れタイプにおける健全度間の垂直的な推移関係を多段階劣化ハザードモデル[23)]で，水平的な推移関係に関しては，推移後の状態が複数個存在するようなmuliti destination型のハザードモデル[29)]で表現する．

つぎに，道路舗装に関する点検データには，その劣化現象の多様性の影響もあり，かなりの測定誤差が含まれている．測定誤差を含んだデータベースを用いて土木施設の劣化予測を行った場合，推計結果にバイアスが含まれ，当該施設の劣化過程を正確に把握することができない．この場合，測定誤差を補正するプロセスを導入することにより，真の劣化過程を表現することができる．本研究では，測定誤差を隠れマルコフモデルによって補正し，マルコフ推移確率をベイズ推計する方法論を提案する．

1.4　本研究の構成

本研究は本章を含め5章で構成されている．次章以降の概要は以下の通りである．

2章では，ひび割れの発生メカニズムに関する研究について触れた上で，同一ひび割れタイプにおける健全度間の垂直的な推移関係を多段階劣化ハザードモデル[23)]で，水平的な推移関係に関しては，推移後の状態が複数個存在するようなmuliti destination型のハザードモデル[29)]で表現する，階層型指数劣化ハザードモデルを提案する．続いて，階層型指数劣化ハザードモデルを用いて表現したマルコフ推移確率を推計する方法について説明する．最後に，東日本高速道路株式会社が管理する東関東自動車道を対象とした実証分析により，提案した方法論の有効性を検証する．

3章では，引き続き**2章**で扱ったひび割れ劣化過程を対象とする．まず，**2章**との差異を明確にした上で，ひび割れタイプごとに独立のハザード関数を定義し，もっとも進行の速いひび割れが観測されるという競合的指数劣化ハザードモデルを提案する．続いて，競合的指数劣化ハザードモデルを用いて表現した状態推移確率を推計する方法について説明する．最後に，東日本高速道路株式会社が管理する東関東自動車道を対象とした実証分析により，提案した方法論の有効性を検証し，既存のモデルとの比較を行う．

4章では，道路舗装の測定結果に誤差が発生するメカニズムを説明し，その誤差を隠れマルコフ劣化モデルを用いて除去する方法論を提案する．続いて，隠れマルコフ劣化ハザードモデルを用いて修正された，真の測定結果に対するマルコフ推移確率を推計する方法について説明する．適用事例として，三重県の管理する国道を対象に隠れマルコフ劣化ハザードモデルを推定し，提案したモデルの有効性を検証する．

最後に**5章**では，本研究で得られた知見を取りまとめるとともに，劣化予測モデルのさらなる発展の道筋について触れ，本論文を結ぶ.

2　階層的劣化予測モデル

2.1　緒言

1章では，土木施設における統計的劣化予測モデルの既往の研究について述べ，その上で統計的劣化予測モデルの課題を明確にした．**2章**では，ひび割れ進行過程の多様性に着目し，それらを階層型指数劣化ハザードモデルを用いてモデル化する手法を提案する．

道路舗装の劣化現象には，わだち掘れ，ひび割れ，平坦性などがあげられる．それらの中でも，ひび割れは発生頻度が高いだけでなく，劣化の進行過程は複雑であり，劣化メカニズムが十分に解明されていない．一般に，ひび割れは，道路舗装の劣化メカニズムの相違により，縦ひび割れ，横ひび割れ，面ひび割れ，ポットホール等に代表されるように，多様な形態で発生する．さらに，ひび割れ形態により，道路舗装の劣化メカニズムが異なる場合が多い．道路舗装の維持補修計画を検討する上で，ひび割れの発生形態に着目した道路舗装の劣化過程の時間管理を行うことが重要である．しかし，著者らの知る限り，このようなひび割れ発生形態の多様性に着目して，ひび割れ進行過程を分析した研究事例は見当たらない．

本研究では，道路舗装に発生するひび割れの状態を損傷度とひび割れタイプという２種類の離散的状態変数を用いて表現する．さらに，舗装のひび割れ進行過程を記述するための階層型指数劣化ハザードモデルを定式化し，ひび割れ進行過程をマルコフ推移確率で表現する方法を提案する．その上で，道路の構造特性，舗装特性や交通条件等がひび割れの進行過程に及ぼす影響を分析する．以下，**2.2節**ではひび割れ過程に対する基本的な考え方を，既存の研究を踏まえて説明し，ひび割れ過程のネットワーク化を行う．**2.3節**では，階層型指数劣化ハザードモデルを定式化する．**2.4節**で，階層型指数劣化ハザードモデルとマルコフ推移確率の推計方法を提案する．さらに，**2.5節**で，実測データを用いた実証分析を通して提案手法の有効性を検証する．

2.2　ひび割れ過程における基本的考え方

2.2.1　ひび割れタイプとマネジメント課題

ひび割れが発生するメカニズムに関しては，種々の研究報告がなされているものの，そのメカニズムに関しては依然として不明な点が少なくない．また，ひび割れのタイプにより，その発生メカニズムの違いが存在することが指摘されている．既往の研究報告を整理すると，一般的にひび割れにはアスファルトコンクリート層底面から発生するものと，表面から発生するものが存在する[30),31)]．底面から発生するひび割れの原因は，１）路床も含めた舗装の構造的な強度不足，２）切盛境などの支持層の不連続，３）リフレクションクラック，４）温度応力，５）材料の品質および施工不良とされている[31)]．また，表面から発生するひび割れでは，特に車輪走行位置付近で縦方向に発生する「わだちわれ」に関

する研究が多く，その原因は，表面温度が高くなることで低スティッフネス状態となったアスファルト舗装に対して，タイヤ端部に生ずる引張りひずみが作用するためであると考えられている[32)−35)]．いずれにしても，ひび割れは以上の原因が複合的に生起した結果であるケースも多く，メカニズムの解明が困難な現象であると言える．一方，舗装のアセットマネジメントの視点に立てば，ひび割れのタイプにより補修方法や補修費用が異なることが課題となる．中でも，縦ひび割れは，発生範囲が広範に及ぶために，大規模補修が必要となる場合が多い．一方，面ひび割れが発生した場合，ポットホールの発生等，管理瑕疵につながる可能性も想定されることから，早期に補修が実施される．しかし，面ひび割れの補修は，局所的な工事で対処可能な場合が少なくない．高速道路の舗装アセットマネジメントにおけるライフサイクル費用を管理する上で，タイプ別のひび割れ発生頻度，ひび割れの進行速度に関する管理情報を獲得することが重要な課題となる．

高速道路における路面性状測定では，ある一定区間（例えば，100メートル区間）ごとに，区間中に存在するひび割れの中で，もっとも劣化が進行した（損傷度の大きい）ひび割れの状態が報告される．当該区間の中に存在するすべてのひび割れに関する情報が報告されるわけではない．特に，道路舗装のアセットマネジメントを実施する場合，わだち掘れ，平坦性，段差等の程度と併せて，道路区間の中でもっとも損傷度が大きいひび割れの状況に基づいて，道路舗装の補修を行うかどうかを検討することになる．このため，ひび割れに関する路面性状測定において，もっとも損傷度の大きい代表的なひび割れの状態に着目することは，一定の合理性を有している．その結果，ある定期測定において，仮に「縦ひび割れ」とその損傷度が報告されたとしても，次の定期測定において，同一箇所のひび割れが選択される保証はない．その時点において，もっとも損傷が激しいひび割れが選択され，その損傷度が報告されることになる．このように路面性状測定では，同一のひび割れの進行過程が追跡されるわけではなく，あくまでも区間を代表するひび割れのタイプとその損傷度が報告されることになる．マクロレベルにおける道路舗装のひび割れ進行過程を記述するためには，路面性状測定で獲得できる各区間ごとの代表的なひび割れのタイプと損傷に関するデータを用いて，時間の進行に伴って発生する水平的・垂直的なひび割れの推移状態をモデル化することが必要となる．

前述したように，ひび割れのタイプと損傷度によって，道路補修の工法や計画が異なる．ライフサイクル費用を推計し，最適な道路補修計画を決定するためには，各道路区間ごとに各タイプのひび割れ発生頻度と，その進行速度を予測し，ライフサイクル費用評価を行うことが必要となる．以上の問題意識の下に，本章では，路面性状測定で獲得できる各区間ごとの代表的なひび割れのタイプと，その損傷度に関する推移状態をマルコフ推移確率として表現する方法論を開発する．マルコフ推移行列を用いることにより，将来時点におけるタイプ別のひび割れ発生頻度や，道路補修によるライフサイクル費用を予測することが可能となる．

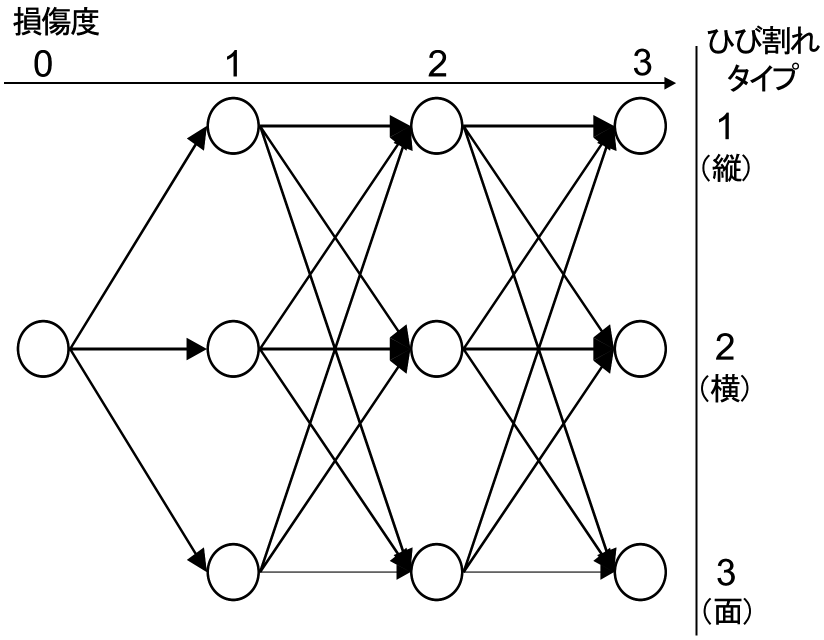
表 2-1　ひび割れ状態の表現方法

損傷度	ひび割れタイプ		
	縦ひび割れ	横ひび割れ	面ひび割れ
$i=0$		$(0,0)$	
$i=1$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$i=2$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$i=3$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$

2.2.2　ひび割れ進行過程

いま，道路舗装のひび割れ状態を，ひび割れの程度の大きさを表す損傷度と，舗装のひび割れ形態を表すひび割れタイプという２種類の離散変数を用いて表現しよう．状態変数 i $(i=0,1,\cdots,I)$ を用いて損傷度を表現しよう．$i=0$ はひび割れが発生していない状況を，$i=I$ はひび割れがもっとも進行した状態を表す．損傷度が $i=I$ に到達した場合には，直ちに道路舗装の補修が実施される．一方，ひび割れのタイプを状態変数 l $(l=1,\cdots,L)$ で表現する．たとえば，本研究の適用事例では，ひび割れタイプとして，縦ひび割れ，横ひび割れ，面ひび割れという３つのタイプを取り上げている．以上の２種類の状態変数を用いて，舗装のひび割れ状態を，損傷度 i $(i=1,\cdots,I)$ と，ひび割れタイプ l $(l=1,\cdots,L)$ のペア (i,l) で表そう．以下，状態変数のペア (i,l) を劣化状態と呼ぶ．**表 2-1** には，本研究の適用事例で用いる劣化状態をリストアップしている．本適用事例では，状態変数 i,l の上限値は，それぞれ $I=3, m=3$ に設定されている．

舗装が補修された直後には，舗装にひび割れが発生しておらず，劣化状態は $(0,0)$ で表される．補修時刻から時間が経過し，舗装に初期のひび割れが発生する．ひび割れ状態が軽微であれば，損傷度 $i=1$ の状態に推移する．そのとき，ひび割れの形態が，縦ひび割れ，横ひび割れ，面ひび割れかにより，劣化状態は $(1,1),(1,2),(1,3)$ のいずれか１つに推移する．舗装表面を一定の区画に分割するとともに，各区画ごとに，ひび割れの損傷度とひび割れタイプを定義する．その場合，１つの区画の中に複数のひび割れが存在する可能性も少なくない．その際，最も損傷度の大きいひび割れに着目し，その区画の劣化状態を定義する．ここで，たとえば損傷度 $i=1$，横ひび割れ $l=2$（すなわち，劣化状態 $(1,2)$）と判定されたある道路区画に着目しよう．この道路区画において，新たに縦ひび割れや面ひび割れが発生しても，損傷度が１に留まる限り，その区画の劣化状態の判定結果は $(1,2)$ の状態に留まると考える．すなわち，損傷度が最初に判定されたひび割れを対象として，ひび割れタイプが定義され，損傷度が進行しない限りひび割れタイプは変更されないと考える．したがって，劣化状態 $(1,2)$ と判定された区間でも，時間の経過とともに縦ひび割れ，面ひび割れが発生し，その中で縦ひび割れ $(i=1)$ が他のひび割れタイプより進行すれば，損傷度 $i=2$ の状態に到達して劣化状態が $(2,1)$ に推移することも起こりえる．すなわ



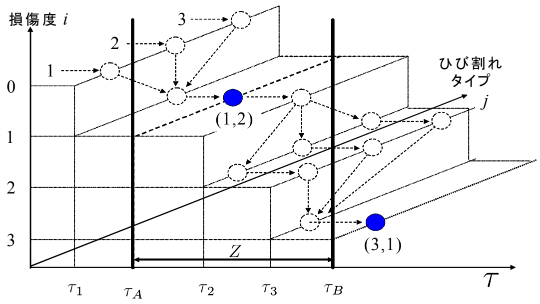
注）図中の○は劣化状態を表している．劣化状態は損傷度 i $(i = 0, 1, 2, 3)$ とひび割れタイプ l $(l = 1, 2, 3)$ の組 (i, l) として表現される．ひび割れ過程は劣化状態 $(0, 0)$ から，右方向へ移動するパターンで進行する．

図 2-1 ひび割れ進行過程

ち，劣化状態の推移は，常に損傷度が増加する方向で，ひび割れタイプの中の１つの状態に推移することになる．**図 2-1** には，劣化状態の進行過程を表現している．同図に示すように，同一損傷度を有する劣化状態間の推移は考えない．同図において，道路舗装が劣化状態 $(3, 1), (3, 2), (3, 3)$ に到達した場合，舗装の補修が直ちに実施される．したがって，これら３つの劣化状態は，ひび割れ進行過程における終局状態（吸収状態）と位置づけることができる．この時，ひび割れ過程は，**図 2-1** に示すような階層的なツリー状ネットワークとして表現することができる．本章では，このようにツリー状ネットワークで表現されるひび割れ進行過程を，階層型指数劣化ハザードモデルを用いて表現することとする．

2.2.3 定期測定とひび割れ進行過程

ひび割れ進行過程は，予防補修が実施されない限り，初期劣化状態 $(0, 0)$ から，**図 2-1** で表されるネットワーク中の１つの経路をたどり，最終的に吸収状態 $(I, 1), (I, 2), (I, 3)$ の中の１つに到達する．しかし，時間軸上の限られた時刻においてのみ道路舗装の劣化状態を測定する場合，測定できるのはその時刻における劣化状態 (i, l) のみである．いま，時間軸上の２つの時刻τ_Aとτ_B $(\tau_A < \tau_B)$ においてひび割れ測定が実施され，ひび割れの劣化状態がそれぞれ $h(\tau_A) = (i, l)$，$h(\tau_B) = (j, m)$ であることが判明したとしよう．たとえば，**図 2-2** の例に示すように，$h(\tau_A) = (1, 2)$，$h(\tau_B) = (3, 1)$ であると考えよう．この場合，劣化



注）時刻τ_Aとτ_Bにひび割れ測定が実施され，そのときの劣化状態 $(1,2)$，$(3,2)$ を●で示す．一方，○は測定不可能な劣化状態を表している．この例では，$h(\tau_A)=(1,2)$ から $h(\tau_B)=(3,2)$ に至るまでにひび割れの進行は３つ経路のうちのいずれかを辿る．しかし，測定者は進行過程に関する情報を取得することができない．さらに，損傷度が $1\rightarrow2$，$2\rightarrow3$ へ変化する時刻τ_2，τ_3についても知ることができない．

図 2-2 劣化状態の時間的推移

状態 $(1,2)$ から $(3,1)$ に推移する経路として，図に示すように３つの経路が存在する．しかし，定期測定の結果からは，実際のひび割れ進行過程がどのような経路を辿ったのかを知ることはできない．また，ひび割れの損傷度も時刻τ_Aとτ_Bの間で，$1\rightarrow2\rightarrow3$ と２回推移しているが，損傷度が推移した時刻に関する情報（τ_2とτ_3）を獲得することができない[36),37)]．このように，定期測定では，２つの定期測定時刻における劣化状態を測定できるが，劣化状態が変化した時刻とひび割れが進行した経路に関する情報を獲得することは不可能である．したがって，階層型指数劣化ハザードモデルを推計するためには，損傷度の推移時刻とひび割れ進行経路に関する情報が入手できないことを前提とした推計方法を開発することが必要となる．

2.3　階層型指数ハザードモデル

2.3.1　マルコフ推移確率

舗装の劣化過程をマルコフ推移確率を用いて表現しよう．２つの時刻間における舗装状態の不確実な推移状態をマルコフ推移確率で表現する．時刻τ_Aで測定したひび割れ状態を状態変数 $h(\tau_A)=(i,l)$ を用いて表そう．マルコフ推移確率は，時刻τ_Aで測定された劣化状態 $h(\tau_A)=(i,l)$ を与件とし，将来時刻（たとえばτ_B）において劣化状態 $h(\tau_B)=(j,m)$ が

生起する条件付推移確率として定義される．すなわち，

$$\mathrm{Prob}[h(\tau_B)=(j,m)|h(\tau_A)=(i,l)]=\pi_{il,jm} \tag{2.1}$$

と表せる．このような推移確率を劣化状態ペア (il,jm) に対して求めれば，マルコフ推移確率行列

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_{00} & \cdots & \boldsymbol{\pi}_{0I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o} & \cdots & \boldsymbol{\pi}_{II} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

を定義できる．ただし，$\mathbf{o}$は0要素行列，$\boldsymbol{\pi}_{il}$ $(i,l=1,\cdots,I)$ はブロック行列であり，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_{00} &= \pi_{00,00} \\ \boldsymbol{\pi}_{0l} &= \begin{pmatrix} \pi_{00,l1} & \cdots & \pi_{00,jL} \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\pi}_{il} &= \begin{pmatrix} \pi_{i1,l1} & \cdots & \pi_{i1,jL} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{iL,l1} & \cdots & \pi_{iL,jL} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される．マルコフ推移確率 (4.1) は所与の２つの時刻τ_A，τ_Bの間において生じる劣化状態間の推移確率を示したものである．当然のことながら，対象とする測定間隔が異なれば，推移確率の値は異なる．補修がない限り常に劣化が進行するので，$\pi_{il,jm}=0\ (i>l)$ が成立する．また，推移確率の定義より$\sum_{l=i}^{I}\sum_{m=1}^{L}\pi_{il,jm}=1$が成立する．すなわち，マルコフ推移確率に関して，

$$\left.\begin{aligned} &\pi_{il,jm}\geq 0 \\ &\pi_{il,jm}=0\ (i>l\text{の時}) \\ &\textstyle\sum_{l=i}^{I}\sum_{m=1}^{L}\pi_{il,jm}=1 \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

が成立しなければならない．状態 (I,m) $(m=1,\cdots,L)$ は，補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり，$\pi_{Im,Im}=1$が成立すると考える．なお，マルコフ推移確率は過去の劣化履歴とは独立して定義される．マルコフ推移確率モデルでは，劣化状態が (i,l) に到達した時刻に関わらず，測定時刻τ_Aから測定時刻τ_Bの間に推移する確率は時刻τ_Aにおける劣化状態のみに依存するという性質（マルコフ性）を満足する．

2.3.2　指数ハザードモデル

いま，劣化状態 (i,l) から，劣化状態 $(i+1,m)$ に推移する推移強度をρ_{ilm}と表そう．この時，劣化状態 (i,l) から劣化状態 $(i+1,m)$ $(m=1,\cdots,L)$ のいずれか１つに推移することにより，劣化状態 (i,l) は終了する．したがって，劣化状態 (i,l) が終了する推移強度は，

$$\theta_{il}=\sum_{m=1}^{L}\rho_{ilm} \tag{2.4}$$

と表せる．いま，劣化状態 (i,l) $(i=0,\cdots,I;l=0,\cdots,L)$ の寿命を確率変数ζ_{il}で表す．劣化状態 (i,l) の寿命ζ_{il}が，確率密度関数 $f_{il}(\zeta_{il})$，分布関数 $F_{il}(\zeta_{il})$ に従うと仮定する．時刻τ_Aにおける劣化状態が (i,l) であり，そこから時間 z_{il}が経過した時刻で劣化状態 (i,l) が終了する確率密度をハザード関数$\lambda_{il}(z_{il})$ を用いて表現する．この時，ハザード関数は，供用時間 z_{il}まで劣化状態が (i,l) のまま継続する生存確率$\tilde{F}_{il}(z_{il})$ を用いて，

$$\lambda_{il}(z_{il})\Delta z_{il} = \frac{f_{il}(z_{il})\Delta z_{il}}{\tilde{F}_{il}(z_{il})} \tag{2.5}$$

と表せる．すなわち，ハザード関数$\lambda_{il}(z_{il})$ は，初期時刻から時間 z_{il}が経過するまで劣化状態 (i,l) の状態が継続したという条件の下で，期間 $[z_{il}, z_{il}+\Delta z_{il})$ 中に劣化状態 (i,l) が終了する条件付確率である．ハザード関数が経過時間 z_{il}に依存せず，常に一定値$\theta_{il}>0$ をとる場合，指数ハザード関数

$$\lambda_{il}(z_{il}) = \theta_{il} \tag{2.6}$$

が成立する．指数ハザード関数 (3.5) を用いることにより，舗装の劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現することが可能となる．式 (3.4) より，

$$\begin{aligned}\lambda_{il}(z_{il}) &= \frac{f_{il}(z_{il})}{\tilde{F}_{il}(z_{il})} = -\frac{\frac{d\tilde{F}_{il}(z_{il})}{dz_{il}}}{\tilde{F}(z_{il})} \\ &= \frac{d}{dz_{il}}\left\{-\log \tilde{F}_{il}(z_{il})\right\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

と変形できる．ここで，$\tilde{F}_{il}(0)=1-F_{il}(0)=1$ を考慮し，式 (3.6) を積分すれば，

$$\begin{aligned}\int_0^{z_{il}} \lambda_{il}(u)du &= [-\log \tilde{F}_{il}(u)]_0^{z_{il}} \\ &= -\log \tilde{F}_{il}(z_{il})\end{aligned} \tag{2.8}$$

を得る．ハザード関数$\lambda_{il}(z_{il})=\theta_{il}$を用いれば，劣化状態 (i,l) の寿命が z_{il}以上となる確率$\tilde{F}_{il}(z_{il})$ は，

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{il}(z_{il}) &= \exp\left\{-\int_0^{z_{il}} \lambda_{il}(u)du\right\} \\ &= \exp(-\theta_{il}z_{il})\end{aligned} \tag{2.9}$$

と表される．すなわち，指数ハザードモデルが得られる．また，式 (3.8) より，劣化状態 (i,l) の寿命分布を表す確率密度関数 $f_{il}(z_{il})$ は次式で示される．

$$f_{il}(z_{il}) = \theta_{il}\exp(-\theta_{il}z_{il}) \tag{2.10}$$

いま，時刻τ_1に劣化状態 (i,l) に推移し，測定時刻τ_Aまで劣化状態 (i,l) が継続した場合を考えよう．すなわち，時刻τ_Aにおける測定の結果，劣化状態が (i,l) であるという測定結果

が得られたとする．この時，時刻τ_Aで，劣化状態が(i,l)であったという条件の下で，さらに時刻τ_Aから追加的にz_{il} (≥ 0)以上にわたって劣化状態(i,l)が継続する確率$\tilde{F}_{il}(\tau_A + z_{il}|\zeta_{il} \geq \tau_A)$は，

$$\tilde{F}_{il}(\tau_A + z_{il}|\zeta_{il} \geq \tau_A) = \mathrm{Prob}\{\zeta_{il} \geq \tau_A + z_{il}|\zeta_{il} \geq \tau_A\} \tag{2.11}$$

と定義できる．確率$\tilde{F}_{il}(z_{il})$の定義より，

$$\frac{\mathrm{Prob}\{\zeta_{il} \geq \tau_A + z_{il}\}}{\mathrm{Prob}\{\zeta_{il} \geq \tau_A\}} = \frac{\tilde{F}_{il}(\tau_A + z_{il})}{\tilde{F}_{il}(\tau_A)} \tag{2.12}$$

が成立する．式(3.8)より，上式の右辺は，

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{F}_{il}(\tau_A + z_{il})}{\tilde{F}_{il}(\tau_A)} &= \frac{\exp\{-\theta_{il}(\tau_A + z_{il})\}}{\exp(-\theta_{il}\tau_A)} \\ &= \exp(-\theta_{il}z_{il})\end{aligned} \tag{2.13}$$

と変形できる．すなわち，測定時刻τ_Aにおいて劣化状態が(i,l)に判定され，次の測定時刻$\tau_B = \tau_A + Z$においても劣化状態が(i,l)に判定される確率は，

$$\mathrm{Prob}[h(\tau_B) = (i,l)|h(\tau_A) = (i,l)] = \exp(-\theta_{il}Z) \tag{2.14}$$

と表される．ただし，Zは２つの測定時刻の間隔を表す．確率$\mathrm{Prob}[h(\tau_B) = (i,l)|h(\tau_A) = (i,l)]$はマルコフ推移確率$\pi_{il,il}$に他ならない．すなわち，指数ハザード関数を用いた場合，推移確率$\pi_{il,il}$は推移強度θ_{il}と測定間隔Zのみに依存し，時刻τ_A，τ_Bに関する情報を用いなくても推移確率を推計することが可能となる．

2.3.3　階層型ハザードモデル

時刻$t = \tau_A$で測定された道路の劣化状態を$h(\tau_A) = (i,l)$，$t = \tau_B$で測定された道路の劣化状態を$h(\tau_B) = (j,m)$とする．測定間隔$Z = \tau_B - \tau_A$の間に劣化状態が(i,l)から(j,m)に推移する確率$\pi_{il,jm}(Z)$を，以下のように定式化できる．

a) $(i,l) = (j,m)$のとき

本ケースでは，期間長Zにわたり，劣化状態(i,l)が継続する．すなわち，推移確率は，式(3.1)より，

$$\pi_{il,il}(Z) = \exp(-\theta_{il}Z) \tag{2.15}$$

と表せる．ただし，$i = I$の時は吸収状態であり，$\pi_{Il,Il}(Z) = 1$が成立する．

b) $j = i+1 \leq I-1$のとき

測定時刻τ_Aとτ_Bの間に損傷度がiから$i+1$に推移する確率を求めよう．この時，推移回数は１回のみである．ひび割れ形態としてL個のタイプが考えられる．劣化状態(i,l)の寿命がζ_{il}となる確率密度関数を

$$\begin{aligned} f_{il}(\zeta_{il}) &= \theta_{il}\exp(-\theta_{il}\zeta_{il}) \\ &= \sum_{m=1}^{L}\rho_{ilm}\exp(-\theta_{il}\zeta_{il}) \end{aligned} \tag{2.16}$$

と表そう．ここに，ρ_{ilm}は，劣化状態(i,l)から，微小時間において劣化状態$(i+1,m)$に推移する強度（以下，推移強度と呼ぶ）を表す．２つの測定時刻に挟まれた期間$[\tau_A,\tau_B)$の間に，劣化状態が(i,l)から$(i+1,m)$に移行するためには，１）時刻τ_Aから時刻$s_{i+1} = \tau_A + z_{il}, (z_{il} \in [0,Z))$まで劣化状態が$(i,l)$のまま推移し，２）時刻$s_{i+1} = \tau_A + z_{il}$において劣化状態が$(i,l)$から$(i+1,m)$に推移し，３）時刻$s_{i+1}$から時刻$\tau_B$まで，劣化状態$(i+1,m)$が継続しなければならない．定期測定では劣化状態が$(i,l)$から$(i+1,m)$に推移した正確な時刻を把握できない．しかし，ここでは仮に，劣化状態の推移が時刻$(\tau_A+\bar{z}_{il}) \in [\tau_A,\tau_B)$に生起したと考えよう．この時，測定時刻$\tau_A$において劣化状態が$(i,l)$であるという条件の下で，時刻$\tau_A$から時刻$\tau_A+\bar{z}_{il}$まで劣化状態が$(i,l)$に留まり，時刻$\tau_A+\bar{z}_{il}$で劣化状態が$(i,l)$から$(i+1,m)$に推移する条件付確率密度$g_{ilm}(\bar{z}_{il})$は，

$$\begin{aligned} g_{ilm}(\bar{z}_{il}) &= \frac{\rho_{ilm}}{\theta_{il}}\frac{f_{il}(\bar{z}_{il}+\tau_A)}{\tilde{F}_{il}(\tau_A)} \\ &= \frac{\rho_{ilm}\exp\{-\theta_{il}(\bar{z}_{il}+\tau_A)\}}{\exp(-\theta_{il}\tau_A)} \\ &= \rho_{ilm}\exp(-\theta_{il}\bar{z}_{il}) \end{aligned} \tag{2.17}$$

と表せる．さらに，測定時刻τ_Aで劣化状態が(i,l)であり，かつ時刻$\tau_A+\bar{z}_{il}$において劣化状態が(i,l)から$(i+1,m)$に変化し，かつ測定時刻τ_Bにおいて劣化状態が$(i+1,m)$と判定される条件付確率密度$q_{ilm}(\bar{z}_{il})$は，

$$\begin{aligned} q_{ilm}(\bar{z}_{il}) &= g_{ilm}(\bar{z}_{il})\cdot\tilde{F}_{i+1m}(\tau_B-\bar{z}_{il}-\tau_A) \\ &= \rho_{ilm}\exp(-\theta_{il}\bar{z}_{il})\exp\{-\theta_{i+1m}(Z-\bar{z}_{il})\} \\ &= \rho_{ilm}\exp(-\theta_{i+1m}Z)\exp\{-(\theta_{il}-\theta_{i+1m})\bar{z}_{il}\} \end{aligned} \tag{2.18}$$

と表せる．以上の議論では，劣化状態が(i,l)から$(i+1,m)$に推移する時刻$\bar{s}_{i+1} = \tau_A+\bar{z}_{il}$を固定していた．しかし，劣化状態$(i,l)$の寿命$z_{il}$は確率変数であり，$z_{il}$は範囲$[0,Z)$の中で変化し得る．２つの測定時刻$\tau_A$と$\tau_B$の間で劣化状態が$(i,l)$から$(i+1,m)$に推移するマ

ルコフ推移確率$\pi_{il,i+1m}$は，

$$\begin{aligned}\pi_{il,i+1m}(Z) &= \mathrm{Prob}[h(\tau_B)=(i+1,m)|h(\tau_A)=(i,l)] \\ &= \int_0^Z q_{ilm}(z_{il})dz_{il} \\ &= \int_0^Z \rho_{ilm}\exp(-\theta_{i+1m}Z)\exp\{-(\theta_{il}-\theta_{i+1m})z_{il}\}dz_{il} \\ &= \frac{\rho_{ilm}}{\theta_{il}-\theta_{i+1m}}\{-\exp(-\theta_{il}Z)+\exp(-\theta_{i+1m}Z)\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

と表せる．ただし，上式において，θ_{il}とθ_{i+1m}の大小関係に関わらず$\pi_{il,i+1m}>0$が成立する．

c) $i+2 \leq j \leq I$のとき

ひび割れの損傷度がiからjまで$j-i$回変化する場合を考える．すなわち，時刻$\bar{s}_n$ $(n=i+1,\cdots,j)$に，損傷度が$n-1$からnに推移すると考える．ただし，推移時刻$\bar{s}_n$ $(n=i+1,\cdots,j)$は与件と考える．さらに，損傷度$i,i+1,\cdots,j$のそれぞれに対して，対応するひび割れのタイプが$m(i),m(i+1),\cdots,m(j)$と推移したと考えよう．このとき，１）時刻τ_Aに劣化状態が(i,l)であり，時刻$\bar{s}_{i+1}$で劣化状態$(i+1,m(i+1))$に推移し，２）以下，同様の推移が発生し，３）時刻$\bar{s}_j$に，劣化状態$(j-1,m(j-1))$から，劣化状態$(j,m(j))$に推移し，４）時刻τ_Bで劣化状態$(j,m(j))$が測定されるような推移経路を考えよう．このような推移経路$\mathcal{M}$を

$$\mathcal{M}=\{(i,l),(i+1,m(i+1)),\cdots,(j,m(j))\} \tag{2.20}$$

と定義する．さらに，劣化状態(i,l)から劣化状態(j,m)に推移する経路の集合を$\Omega_{il,jm}$と表記しよう．ここで，時刻τ_Aと時刻τ_Bの間で，劣化状態$(i,l),(i+1,m(i+1)),\cdots,(j,m(j))$が継続する期間長$z_{im(i)},\cdots,z_{jm(j)}$を，$z_i,\cdots,z_j$と簡略化して表す．推移経路$\mathcal{M}\in\Omega_{il,jm}$が実現する条件付確率$g_{\mathcal{L}}(\bar{\boldsymbol{z}})$は，

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{M}}(\bar{\boldsymbol{z}}) &= g_{ilm}(\bar{z}_i)g_{i+1m(i+1)m(i+2)}(\bar{z}_{i+1})\cdots g_{j-1m(j-1)m}(\bar{z}_{j-1})\tilde{F}\left(Z-\sum_{n=i}^{j-1}\bar{z}_n\right) \\ &= \left(\prod_{n=i}^{j-1}\rho_{nm(n)m(n+1)}\right)\exp\left(-\sum_{n=i}^{j-1}\theta_{nm(n)}\bar{z}_n\right)\exp\left\{-\theta_{jm}\left(Z-\sum_{n=i}^{j-1}\bar{z}_n\right)\right\} \\ &= \left(\prod_{n=i}^{j-1}\rho_{nm(n)m(n+1)}\right)\exp\Big(-\theta_{jm}Z-\sum_{n=i}^{j-1}\eta_{nm(n),jm}\bar{z}_n\Big) \end{aligned} \tag{2.21}$$

と表せる．ただし，$\eta_{nm(n),jm}=\theta_{nm(n)}-\theta_{jm}$であり，$\theta_{jm}$は定義されないので$\eta_{nm(n),Im}=\theta_{nm(n)}$として定義する．式(2.21)では$\bar{z}_n$ $(n=i,\cdots,j-1)$を固定していたが，実際にはz_nは$0\leq\sum_{n=i}^{j-1}z_n\leq Z$を満たす範囲で自由な値を取る．したがって，推移経路$\mathcal{M}\in\Omega_{il,jm}$が実現する条件付確率は，

$$\pi^{\mathcal{M}}_{il,jm}(Z) = \int_0^Z\int_0^{Z-z_i}\cdots\int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-1}z_n} g_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{z})dz_i\cdots dz_{j-1}$$

$$= \int_0^Z \int_0^{Z-z_i} \cdots \int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-1} z_n} \left(\prod_{n=i}^{j-1} \rho_{nm(n)m(n+1)} \right)$$
$$\exp \left(-\theta_{jm} Z - \sum_{n=i}^{j-1} \eta_{nm(n),jm} z_n \right) dz_i \cdots dz_{j-1} \tag{2.22}$$

と表せる．ただし，$m(j)=m$，$\boldsymbol{z}=(z_i,\cdots,z_{j-1})$ である．推移経路 $\mathcal{M}$ を構成する途中段階の損傷度 $(i+1,\cdots,j-1)$ では，異なるひび割れタイプを経由するような経路が存在する．したがって，時間間隔 Z の間に，劣化状態 (i,l) から (j,m) へ推移する確率は，

$$\begin{aligned}
\pi_{il,jm} &= \sum_{\mathcal{L}\in\Omega_{il,jm}} \pi^{\mathcal{L}}_{il,jm}(Z) \\
&= \sum_{m(i+1)=1}^{L} \cdots \sum_{m(j-1)=1}^{L} \int_0^Z \int_0^{Z-z_i} \cdots \int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-1} z_n} \\
&\quad \left(\prod_{n=i}^{j-1} \rho_{nm(n)m(n+1)} \right) \exp\Big(-\theta_{jm} Z - \sum_{n=i}^{j-1} \eta_{nm(n),jm} \bar{z}_n \Big) dz_i \cdots dz_{j-1} \\
&= -\sum_{k=i+1}^{j-1} \Big[\sum_{m(k)=1}^{L} \left(\prod_{n=k}^{j-1} \frac{\rho_{nm(n)m(n+1)}}{\eta_{nm(n),jm}} \right) \pi_{il,km(k)} \\
&\quad + \sum_{m(i+1)=1}^{L} \left(\prod_{n=i}^{j-1} \frac{\rho_{nm(n)m(n+1)}}{\eta_{nm(n),jm}} \right) \{\exp(-\theta_{jm(j)} Z) - \exp(-\theta_{il} Z)\} \Big]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

と表せる．ただし，$m(j)=m$ である（**付録（１）**参照）．式 (2.23) において，$\pi_{il,jm}(i=0,\cdots,I-1, j=i+2,\cdots,I; l,\ m=1,\cdots,L)$ は $\pi_{il,i+11},\cdots,\pi_{il,i+1m},\cdots,\ \pi_{il,j-1L}$ の線形結合になっており，上式は，

$$\boldsymbol{\pi}_{il} = -\boldsymbol{\pi}_{il}\boldsymbol{A}(il) + \boldsymbol{C}(il) \tag{2.24}$$

と表せる．ただし，$\boldsymbol{\pi}_{il}=(\pi_{il,i+11},\cdots,\pi_{il,jm})$ であり，行列 $\mathbf{A}(il)$ は，

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{o} & \boldsymbol{\alpha}_{i+1,i+2}(il) & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{i+1,I}(il) \\
\mathbf{o} & \mathbf{o} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{i+2,I}(il) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{o} & \mathbf{o} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{I-1,I}(il) \\
\mathbf{o} & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o}
\end{pmatrix}$$

と表せる．$\mathbf{o}$ は 0 要素行列，ブロック行列 $\boldsymbol{\alpha}_{pq}(il)$ $(p=i+1,\cdots,I-1; q=p+1,\cdots,I)$ は，

$$\begin{pmatrix}
\alpha^{11}_{pq}(il) & \alpha^{12}_{pq}(il) & \cdots & \alpha^{1L}_{pq}(il) \\
\alpha^{21}_{pq}(il) & \alpha^{22}_{pq}(il) & \cdots & \alpha^{2L}_{pq}(il) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha^{L1}_{pq}(il) & \alpha^{L2}_{p,q}(il) & \cdots & \alpha^{LL}_{pq}(il)
\end{pmatrix}$$

と定義でき，その (r,m) $(r,m=1\cdots,L)$ 成分は，

$$\alpha_{pq}^{r,m}(il)=\sum_{k=p+1}^{q-1}\sum_{m(k)=1}^{L}\left(\prod_{n=p}^{q-1}\frac{\rho_{nm(n)m(n+1)}}{\eta_{nm(n),jm}}\right)$$

と表せる．ただし，$m(p)=l, m(q)=m$ である．行ベクトル $\boldsymbol{C}(il)=\{\boldsymbol{C}_l(il):l=i+1,\cdots,I\}$ を構成する $I-i-1$ 個の要素 $\boldsymbol{C}_l(il)$ の内，$l=i+2,\cdots,I$ に関しては，$\boldsymbol{C}_l(il)=\{C_l^m(il):m=1,\cdots,L\}$ であり，

$$C_l^m(il)=\sum_{k=i+1}^{j-1}\sum_{m(k)=1}^{L}\left(\prod_{n=i}^{j-1}\frac{\rho_{nm(n)m(n+1)}}{\eta_{nm(n),jm}}\right)\{\exp(-\theta_{jm(j)}Z)-\exp(-\theta_{il}Z)\}$$

と表せる．ただし，$m(j)=m$ である．また，$j=i+1$ の場合，$\boldsymbol{C}_{i+1}(il)=\{C_{i+1}^m(il):m=1,\cdots,L\}$ の構成要素は，式(2.19) で表される．

2.4　マルコフ推移確率の推計方法

2.4.1　指数ハザード関数

道路舗装のひび割れ状況に関する合計 K 個の定期測定データが得られたとしよう．測定サンプル k $(k=1,\cdots,K)$ には，２個の連続する定期測定が実施されたカレンダー時刻 τ_A^k と τ_B^k と，各測定で計測された道路区間の劣化状態 $h(\tau_A^k),h(\tau_B^k)$ に関する情報が記述されている．測定サンプルにより，測定間隔が異なっていても差し支えがない．測定サンプル k の測定間隔を $Z^k=\tau_B^k-\tau_A^k$ と定義する．さらに，２つの測定時刻における劣化状態の推移パターンに基づいて，ダミー変数 $\delta_{il,jm}^k$ $(i,l=0,\cdots,I;l,m=0,\cdots,L;k=1,\cdots,K)$ を

$$\delta_{il,jm}^k=\begin{cases}1 & h(\tau_A^k)=(i,l)\\ & h(\tau_B^k)=(j,m)\text{ の時}\\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}\tag{2.25}$$

と定義する．さらに，道路のひび割れ劣化速度に影響を及ぼす，道路の構造特性や環境特性を表す特性ベクトルを $\boldsymbol{x}^k=(x_1^k,\cdots,x_M^k)$ と表す．ただし，x_m^k $(m=1,\cdots,M)$ は道路区間サンプル k の m 番目の特性変数の測定値を表す．定期測定スキームの下で得られる測定サンプル k が有する情報は $\boldsymbol{\xi}^k=(\boldsymbol{\delta}^k,Z^k,\boldsymbol{x}^k)$ として整理できる．ただし，$\boldsymbol{\delta}^k=\{\delta_{il,jm}^k:i,l=0,\cdots,I-1;l,m=0,\cdots,L\}$ はダミー変数ベクトルである．

一方，道路区間サンプル $k=(k=1,\cdots,K)$ の劣化状態の推移強度を指数ハザード関数

$$\lambda_{il}^k(z_{il}^k)=\theta_{il}^k=\sum_{m=1}^{L}\rho_{ilm}^k\qquad(i=0,\cdots,I-1;m=0,\cdots,R)\tag{2.26}$$

を用いて表現しよう．道路ひび割れの劣化過程を特徴づける推移強度 ρ_{ilm}^k $(i=0,\cdots,I-1;l,m=0,\cdots,L,k=1,\cdots,K)$ は道路区間の特性ベクトルに依存して変化すると考え，推

移強度ρ_{ilm}^kを特性ベクトル$\boldsymbol{x}^k$を用いて,

$$\rho_{ilm}^k = \boldsymbol{x}^k \boldsymbol{\beta}_{ilm}' \tag{2.27}$$

と表そう．以下，式(2.27)を推移強度モデルと呼ぶ．ただし，$\boldsymbol{\beta}_{ilm} = (\beta_{ilm}^1, \cdots, \beta_{ilm}^M)$は未知パラメータ$\beta_{ilm}^m$ $(m = 1, \cdots, M)$による行ベクトルである．記号$'$は転置操作を表す．測定サンプル情報$\boldsymbol{\xi}^k$ $(k = 1, \cdots, K)$に基づいて指数ハザード関数(2.27)を推計することになる．**2.4.2**では，指数ハザード関数を推計する方法について述べる．階層型指数ハザード関数の場合，推移確率を解析的に導出することが困難であるため，尤度関数の偏微分係数を直接求めることが困難である．そのため，**2.4.3**では，直接探索法を用いて指数ハザード関数のパラメータの最尤推計量を求める方法を説明する．指数ハザード関数を推計できれば，階層型ハザードモデルを用いて，**2.3.3**で言及した方法によりマルコフ推移確率を算定できる．本章で提案する方法論では，各道路区間ごとにマルコフ推移確率を算定することが可能である．しかし，現実の道路マネジメントにおいて，個別の道路区間ごとに最適補修計画を求めると問題が過度に煩雑になる．このため，類似の道路区間を対象にして平均的なマルコフ推移確率を推計した方が便利な場合が少なくない．そこで，**2.4.4**では指数ハザードモデルを用いて平均的なマルコフ推移確率を推計する方法について説明する．

2.4.2　尤度関数の定式化

測定サンプルkに関して獲得できる情報は$\bar{\boldsymbol{\xi}}^k = (\bar{\boldsymbol{\delta}}^k, \bar{Z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k)$である．記号「$\bar{\ }$」は実測値であることを示す．マルコフ推移確率は各劣化状態における推移強度ρ_{ilm}^k $(i = 0, \cdots, I-1; l, m = 0, \cdots, L; k = 1, \cdots, K)$を用いて表現されるが，推移強度は道路区間の特性ベクトル$\bar{\boldsymbol{x}}^k$を用いて式(2.27)で表せる．また，推移確率はデータが観察された測定間隔$\bar{Z}^k$にも依存する．このことを明示的に表すため推移確率$\pi_{il,jm}$を実測データ$(\bar{Z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k)$と未知パラメータ$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_{000}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{I-1LL})$の関数として$\pi_{il,jm}(\bar{Z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k : \boldsymbol{\beta})$と表そう．いま，$K$個の道路区間の劣化現象が互いに独立であると仮定すれば，全測定サンプルの劣化推移パターンの同時生起確率密度を表す対数尤度関数[36),37)]は次式で定義される．

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}) &= \ln \prod_{i=0}^{I-1} \prod_{l=0}^{L} \prod_{l=i}^{I-1} \prod_{m=0}^{L} \prod_{k=1}^{K} \left\{ \pi_{il,jm}(\bar{Z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k : \boldsymbol{\beta}) \right\}^{\bar{\delta}_{il,jm}^k} \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{l=0}^{L} \sum_{l=i}^{I-1} \sum_{m=0}^{L} \sum_{k=1}^{K} \bar{\delta}_{il,jm}^k \ln \left\{ \pi_{il,jm}(\bar{Z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k : \boldsymbol{\beta}) \right\} \end{aligned} \tag{2.28}$$

測定データ$\bar{\delta}_{il,jm}^k$, $\bar{Z}^k$, $\bar{\boldsymbol{x}}^k$はすべて確定値であり，対数尤度関数は未知パラメータ$\boldsymbol{\beta}$の関数として表される．対数尤度関数(2.28)を最大にするようなパラメータ値$\boldsymbol{\beta}$の最尤推計値は,

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial \beta_{ilm}^m} = 0 \quad (i = 0, \cdots, I-1; l, m = 0, \cdots, L; m = 1, \cdots, M) \tag{2.29}$$

を同時に満足するような$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_{000}^1, \cdots, \hat{\beta}_{I-1LL}^M)$として与えられる．

2.4.3　パラメータの推計方法

以上で定義されたパラメータの最尤推計値を求めるためには，対数尤度関数 (2.28) のパラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}$に関する１階の偏微分係数を求める必要がある．ここで，推移確率$\pi_{il,jm}(\bar{Z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k : \boldsymbol{\beta})$ は式 (2.24) を満足するような$\pi^*_{il,jm}(\bar{Z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k : \boldsymbol{\beta})$ として与えられることに着目しよう．すなわち，推移確率を求めるためには係数行列$\boldsymbol{A}(il)$ の逆行列を求めることが必要となる．そのため，ひび割れ度タイプ数lの次元が大きくなると，尤度関数の偏微分係数を解析的に導出することが困難となる．以上の理由により，本章では尤度関数の偏微分係数の算定を前提としない直接探索法の１つであるパターン法[38),39)]を用いて最尤推計量を求めることとした．パターン法によるアルゴリズムを説明するために，パラメータベクトル$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_{000}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{I-1LL})$ の各要素の下付き添え字を再定義し，$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_I)$ と書き換える．この時，パターン法による最尤推計量を求める手順は以下のように整理できる．

ステップ１　パラメータ値$\boldsymbol{\beta}$の初期値$\boldsymbol{\beta}^{(0)}$を用いて$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = \boldsymbol{\beta}^{(1,0)} = \boldsymbol{b}^0$と設定する．初期ステップ幅$\boldsymbol{\xi}^0 = (\xi^0_1, \cdots, \xi^0_I)$ を設定する．収束判定基準ε_i $(i = 1, \cdots, I)$ を与える．ステップ数を$k = 1$, $i = 1$とする．

ステップ２　ステップk，サブステップiのパラメータベクトル

$$\boldsymbol{\beta}^{(k,i)} = (\beta^{k,i}_1, \cdots, \beta^{k,i}_i, \beta^{k,i-1}_{i+1}, \cdots, \beta^{k,i-1}_I)' \tag{2.30}$$

を定義する．また，サブステップiにおけるステップ幅を定義するベクトル$\boldsymbol{\xi}^k_i = (0, \cdots, 0, \xi^k_i, 0, \cdots, 0)'$（第$i$要素のみが値$\xi^k_i$をとる列ベクトル）を定義する．この時，$k$ステップの第$i$サブステップにおける新しいパラメータベクトルを

$$\boldsymbol{\beta}^{(k,i)} = \begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)} + \boldsymbol{\xi}^k_i & \begin{array}{l}\ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)}) \\ \quad < \ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)} + \boldsymbol{\xi}^k_i)\end{array} \\ \boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)} - \boldsymbol{\xi}^k_i & \begin{array}{l}\ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)} + \boldsymbol{\xi}^k_i) \leq \\ \ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)}) \\ \quad < \ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)} - \boldsymbol{\xi}^k_i)\end{array} \\ \boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)} & \begin{array}{l}\ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)}) \\ \geq \max\{\ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)} + \boldsymbol{\xi}^k_i), \\ \ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta}^{(k,i-1)} - \boldsymbol{\xi}^k_i)\}\end{array} \end{cases} \tag{2.31}$$

により更新する．以上の手続きを$i = 1$から$i = I$に到達するまで実施する．サブステップ終了後，$\boldsymbol{b}^k = \boldsymbol{\beta}^{(k,I)}$とおく．

ステップ３　$\boldsymbol{b}^k \neq \boldsymbol{b}^{k-1}$の場合，ステップ４へ進む．$\boldsymbol{b}^k = \boldsymbol{b}^{k-1}$の場合，ステップ幅を

$$\xi^{i,k+1} = \frac{1}{2}\xi^{i,k} \ (i = 1, 2, \cdots, p) \tag{2.32}$$

と縮小する．すべてのiに対して$\xi_i^{k+1} < \varepsilon_i$が成立すればアルゴリズムを終了する．そうでない場合は，$k = k+1$，$i = 1$とし，ステップ2へ戻る．

ステップ4　探索基点$\boldsymbol{b}^k, \boldsymbol{b}^{k-1}$の情報を用いて，新しい探査基点を

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1,0)} = 2\boldsymbol{b}^k - \boldsymbol{b}^{k-1} \tag{2.33}$$

により定義する．ただし，$\boldsymbol{\beta}^{(1,0)} = 2\boldsymbol{b}^1$である．$k = k+1, i = 1$とし，ステップ2へ戻る．

以上の方法で，最尤推計量$\hat{\boldsymbol{\beta}}$を求めることができる．

2.4.4　マルコフ推移確率の平均化操作

マルコフ推移確率は道路特性$\boldsymbol{x}^k$と測定間隔Z^kが与えられれば，式(2.15),(2.19),(2.23)により推計できる．測定間隔Z^kを変化させることにより，任意の測定間隔に対してマルコフ推移確率行列を推計することができる．本章で提案した方法により，個々の道路区間ごとに，その区間固有のマルコフ推移確率行列を推計することが可能である．しかし，数多くの道路全体としての劣化パターンを予測する場合，個別の道路区間ごとの推移確率よりも，平均的な推移確率を求める方が便利な場合が多い．本章では推移強度ρ_{ilm}^k $(k = 1, \cdots, K)$に着目した平均化操作を提案しよう．いま，対象とする道路区間母集団における道路特性の分布関数を$\Gamma(\boldsymbol{x})$と表そう．この時，母集団における推移強度の期待値（以下，平均推移強度と呼ぶ）$E[\rho_{ilm}]$は，

$$E[\rho_{ilm}] = \int_{\Theta} \boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}'_{ilm} d\Gamma(\boldsymbol{x}) \tag{2.34}$$

と表せる．Θはサンプル母集団を表す．さらに，平均推移強度を用いて，劣化過程の期待値パス（以下，平均的劣化曲線と呼ぶ）を求めることができる．ここで，損傷度iの状態に到達した時刻から，劣化が進展してつぎの損傷度$i+1$に進むまでの期待期間長は，生存関数$\tilde{F}_{il}(z_{il}^k)$を用いて，

$$LMD_{il}^k = \int_0^{\infty} \tilde{F}_{il}(z_{il}^k) dz_{il}^k \tag{2.35}$$

と表される[29)]．ここで，指数ハザード関数を用いた生存関数$\tilde{F}_{il}(z_{il}^k)$が式(3.8)で表されることに留意すれば，損傷度期待寿命は次式で示される．

$$LMD_{il}^k = \int_0^{\infty} \exp(-\theta_{il}^k z_{il}^k) dz_{il}^k = \frac{1}{\theta_{il}^k} \tag{2.36}$$

2.5　適用事例

2.5.1　適用事例の概要

本章で提案した階層型指数劣化ハザードモデルを，東関東自動車道（区間：湾岸市川IC－潮来IC）において過去13年間（1992年〜2004年）に実施された路面性状測定結果に

表 2-2　ひび割れ劣化状態

劣化状態	物理的な意味
0,0 (0)	新設状態
1,1 (1)	縦ひび割れ (小規模)
2,1 (2)	(中規模)
3,1 (3)	(大規模)
1,2 (4)	横ひび割れ (小規模)
2,2 (5)	(中規模)
3,2 (6)	(大規模)
1,3 (7)	面ひび割れ (小規模)
2,3 (8)	(中規模)
3,3 (9)	(大規模)

注) 劣化状態の括弧内の数字は，路面性状測定時における評価結果を表している．

適用し，モデルの適用可能性を検討する．対象とする高速道路区間は全区間長が74.5kmであり，合計11個の部分区間により構成される．同区間では，大型車の利用が多く，中交通区間（１方向あたり１日1,500台以上5,000台未満）に分類される部分区間が多い．中には，超重交通区間（１方向あたり１日10,000台以上）に指定されている部分区間が４箇所存在している．また，舗装種別はアスファルト舗装であり，車線構成は８区間（湾岸市川IC〜成田IC）が片側３車線で，３区間（成田IC〜潮来IC）が片側２車線である．同区間で実施された路面性状測定の結果は，ひび割れの状態を，０から９までの整数値（レーティング）で評価している．これらのレーティングは，３つのひび割れのタイプ（縦ひび割れ・横ひび割れ・面ひび割れ）と各タイプに対する３つの損傷度（劣化の進行度）の組み合わせに対応している．本章では，ひび割れの状態を，**表 2-2** に示すようなひび割れのタイプと，各タイプに対する損傷度の組み合わせにより表現した．同表には，路面性状測定における評価結果との対応関係も示している．なお，大規模なひび割れ（表中の劣化状態(3,1),(3,2),(3,3)）が発生した時点で，直ちに補修が実施されるため，これらの状態をマルコフ連鎖の吸収状態と考える．また，現実には，面ひび割れが発生した段階でも，補修が実施されるため，面ひび割れが発生した状態も吸収状態と考える．したがって，**図 2-1** において状態 (1,3),(2,3) を起点とする劣化パスは存在せず，劣化状態 (1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3) は吸収状態となる．

高速道路における路面性状測定では，各路線の100mを１セクションとして，セクションごとにひび割れに対する損傷度評価が行われる．１つのセクションに複数のひび割れが存在する場合には，発見されたひび割れの中で，もっとも進行したひび割れが選択され，当該セクションの代表的なひび割れとしてデータベースに記載される．このため，ある時点の路面性状測定時点と，次の測定時点の間に，セクションを代表するひび割れが変化し，

表 2-3　数え上げによるサンプル推移行列

劣化状態	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(0,0)	0.655	0.085	0.141	0.012	0.023	0.024	0.002	0.015	0.044	0.001
	(5271)	(680)	(1133)	(96)	(183)	(193)	(15)	(121)	(351)	(5)
(1,1)	0.0	0.473	0.0	0.0	0.191	0.105	0.020	0.119	0.092	0.0
	(0)	(139)	(0)	(0)	(56)	(31)	(6)	(35)	(27)	(0)
(1,2)	0.0	0.0	0.540	0.0	0.082	0.128	0.007	0.063	0.176	0.004
	(0)	(0)	(443)	(0)	(67)	(105)	(6)	(52)	(144)	(3)
(1,3)	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	(0)	(0)	(0)	(4)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(2,1)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.426	0.0	0.0	0.447	0.121	0.007
	(0)	(0)	(0)	(0)	(60)	(0)	(0)	(63)	(17)	(1)
(2,2)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.275	0.0	0.069	0.656	0.0
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(60)	(0)	(15)	(143)	(0)
(2,3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
(3,1)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(77)	(0)	(0)
(3,2)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(629)	(0)
(3,3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)

注）数字は推移パターンのシェア s_{il}^{jm} を示している．括弧の中の数字は，該当するサンプル数を表している．

データベースには異なるひび割れの情報が記載されることがある．本データベースから，過去２回以上路面性状測定が実施された区間を抽出し，連続する２回の測定結果に基づいて，劣化状態（ひび割れのタイプと損傷度）の推移状況に関するサンプルデータを作成した．ただし，補修の実施や測定誤差などの理由により．損傷度が前回よりも回復しているサンプルはデータベースから削除した．その結果，階層型指数劣化ハザードモデルの推計のために利用可能なサンプル数 K は合計 $10,231$ 個となった．

2.5.2　劣化パターンの設定

適用事例では，ひび割れの劣化状態を**表 2-2** に示す状態変数を用いて表現する．測定時刻 τ_A の劣化状態を (i,l)，測定時刻 τ_B の劣化状態を (j,m) と表す．測定間隔を Z とする．劣化状態 $(3,m)$ $(m=1,2,3)$, $(i,3)$ $(i=1,2)$ は吸収状態であり $\pi_{3m,3m}=1$ $(m=1,2,3)$, $\pi_{i3,i3}=1$ $(i=1,2)$ が成立する．つぎに，測定時刻 τ_A における劣化状態が $(2,l)$ $(l=1,2)$ である場合を考えよう．この場合，測定時刻 τ_A と τ_B の間における状態推移確率として１）損傷度２に留まる場合（$\pi_{2l,2l}$），２）損傷度２から損傷度３に推移する場合（$\pi_{2l,3m}$ $(m=1,2,3)$）が考えられる．さらに，測定時刻 τ_A における損傷度が $i=1$ の場合，測定時刻 τ_A と τ_B の間における状

態推移確率として1）損傷度1に留まる場合（$\pi_{1,1}$），2）損傷度1から損傷度2に推移する場合（$\pi_{1l,2m}\ (m=1,2,3)$），3）損傷度1から損傷度3に推移する場合（$\pi_{1l,3m}\ (m=1,2,3)$）が存在する．最後に，時刻τ_Aにおける劣化状態が$(0,0)$の場合，1）損傷度0に留まる場合（$\pi_{00,00}$），2）損傷度0から損傷度1に推移する場合（$\pi_{00,1l}\ (l=1,2,3)$），3）損傷度0から損傷度2に推移する場合（$\pi_{00,2m}\ (m=1,2,3)$），4）損傷度0から損傷度3に推移する場合（$\pi_{00,3m}\ (m=1,2,3)$）が存在する．各サンプルデータには，連続した2つの測定時点における事前の劣化状態(i,l)と事後の劣化状態(j,m)に関するデータが記載されている．この情報を用いて，劣化状態間の推移パターンを数え上げることができる．いま，サンプル集合をΩと表し，個々のサンプルを$e_k\in\Omega\ (k=1,\cdots,K(=10,231))$と表そう．また，サンプル$k$の事前の劣化状態を$(i(k),l(k))$，事後の劣化状態を$(j(k),m(k))$と表そう．その上で，推移パターンのシェア$s_{il}^{jm}$を

$$s_{il}^{jm}=\frac{\#\{e(k)\in\Omega|i(k)=i,j(k)=j,l(k)=l,m(k)=m\}}{\#\{e(k)\in\Omega|i(k)=i,l(k)=l\}} \tag{2.37}$$

と定義する．ここに，記号$\#\{A\}$は集合$\{A\}$に属する要素の数を表す．すなわち，推移パターンのシェアは，2つの測定時点の間に，劣化状態(i,l)から劣化状態(j,m)に推移したパターン数が，事前の測定時点において劣化状態が(i,l)であったサンプル数に占める割合であり，推移確率を表している．このように数え上げにより求めた劣化状態の推移パターン行列を**表2-3**に示している．同表には，各推移パターンに該当するサンプル数も示している．数え上げにより，サンプル推移状態行列を容易に計算できるが，このような方法はいくつかの限界を有している．第1に，路面性状測定で獲得したサンプルは，測定間隔が必ずしも同一ではないことがあげられる．マルコフ推移確率は，ある一定の期間の間における推移確率により定義される．数え上げ法は，測定間隔の多寡による推移確率の変化を取り扱うことが困難である．第2に，サンプルデータには，道路構造特性や，車線等，異なる特性を有するセクションのデータが混在している．このため，このような特性の差異が，ひび割れの発生速度に及ぼす影響を分析しようとするとサンプル数が極端に減少し，分析結果の信頼性に問題が発生する．第3に，サンプルシェアは，測定の結果として偶然に得られたサンプルにより定義されたものであり，ひび割れ過程の背後にある統計的性質を評価することが不可能である．数え上げ法は簡単な方法であるが，上記の課題に対して応えることができない．以下では，本章で提案した階層型指数劣化ハザードモデルを用いて，劣化状態間の推移確率を表すマルコフ推移確率を推計することとする．

表 2-4　パラメータの推計結果

劣化過程 (i,j,m)	β^1_{ilm}		β^2_{ilm}		β^3_{ilm}		β^4_{ilm}	
(0,0,1)	-0.0272	-	0.0163	(42.402)	0.0070	(11.244)	0.1304	(460.797)
(0,0,2)	-0.0369	-	0.0235	(57.460)	-	-	0.2259	(942.528)
(0,0,3)	0.0065	-	-0.0032	(10.697)	-	-	-	-
(1,1,1)	0.0588	-	0.1299	(23.023)	-	-	-	-
(1,1,2)	0.1203	-	-	-	-	-	-	-
(1,1,3)	0.0211	-	-0.0269	(12.805)	0.0157	(6.830)	-	-
(1,2,1)	0.0241	-	0.0784	(34.455)	-	-	-	-
(1,2,2)	0.1273	-	0.1718	(66.249)	-	-	-	-
(1,2,3)	0.0057	-	-	-	-	-	-	
(2,1,1)	0.2349	-	-	-	-	-	-	-
(2,1,2)	0.0501	-	-	-	-	-	-	
(2,1,3)	0.0803	-	-0.0737	(10.431)	-	-	-	-
(2,2,1)	0.0211	-	0.1293	(13.189)	-	-	-	-
(2,2,2)	0.6698	-	0.2099	(5.265)	-	-	-	-
(2,2,3)	-	-	-	-	-	-	-	-

注）括弧内は尤度比検定統計量を表している．また，吸収状態についてはハザード率が0となる．同表では，吸収状態のハザード率を記述していない．サンプルには，劣化状態$(2,2)$から$(3,3)$に移行する劣化パターン$(2,2,3)$が存在しないため，推移強度ρ_{223}に対応するハザード関数が定義されない．

2.5.3　推計結果

ひび割れの劣化状態は，**表 2-2**に示したような10個の状態変数を用いて表現することができる．このうち，終局状態である(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)の5つの劣化状態を除いた合計5つの劣化状態に対して，それぞれ劣化ハザードモデルを定義することができる．サンプルkの劣化状態(i,l)における劣化ハザードモデル(2.27)は，3つの推移強度ρ^k_{ilm} $(m=1,2,3)$のそれぞれに対応するハザードモデルを用いて，

$$\theta^k_{il} = \sum_{m=1}^{3} \rho^k_{ilm} \tag{2.38a}$$

$$\rho^k_{ilm} = \sum_{m=1}^{4} \beta^m_{ilm} x^k_m \tag{2.38b}$$

$$(i,j=0,1,2; m=1,2,3; k=1,\cdots,10,231)$$

と表せる．このように劣化ハザードモデルを特定化すれば，5つの劣化状態のそれぞれに対してρ^k_{il1}，ρ^k_{il2}，ρ^k_{il3}という3つの推移強度が存在する．したがって，合計15個の推移強度モデル(2.27)を推計することが必要となる．推移強度モデルの説明変数として，定数項，車種別交通量，舗装特性，道路構造特性，車線，勾配，気温等の自然条件等を考えることが

できる．しかし，本データベースでは，東関東自動車道という単一路線を対象としているため，本来ひび割れの進行に影響を及ぼす舗装特性，勾配，自然条件に関する情報は，対象とするセクションごとに同一の値をとる．このため，これらの変数は推移強度モデルの説明変数にとりあげられていない．むしろ，その効果は定数項に集約的に表現されていると考えることができる．結果的に，階層型指数劣化ハザードモデルの推計に用いた説明変数は，道路構造特性，車線，大型車交通量（大型交通量は区間内での最大値を 1 として基準化している.）である．なお，説明変数の選定に際しては，後に示すように，各説明変数の説明力を尤度比検定統計量で定量的に比較することが可能である．しかしながら，説明変数の数が増えるほど，推定が困難になるだけでなく，推定精度の低下を招く．したがって，上述したように道路特性や使用状況，環境条件を勘案しながら，専門技術者が説明変数を選定するほかはない．説明変数の選定方法は他のケースであっても同様であるが，当然のことながら，解析対象とする路線が異なれば採用すべき説明変数も変わりうる．その意味において，今回のケースで採用した説明変数を用いて推計した階層型指数劣化ハザードモデルは，分析対象としてとりあげた対象区間においてのみ適用可能であることは言うまでもない．

以上の説明変数を用いて，15 個の推移強度モデルのパラメータを推計した．その際，各推移強度モデルごとに，説明変数の組み合わせを変化させ，階層型指数劣化ハザードモデル全体の推計精度を比較した．その際，説明変数の説明力を尤度比検定を用いて評価し，説明力の乏しい説明変数を除外した．尤度比 $m(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m})$ $(m = 1, \cdots, I)$ は次式で求めることができる．

$$m(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m}) = 2\{\ln \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \ln \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m})\} \tag{2.39}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m}$は，パラメータの最尤推計値ベクトル$\hat{\boldsymbol{\beta}}$に対して，第 m 要素$\hat{\beta}_m$を 0 に置換したベクトルである．この時，$|m(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m})| \geq 3.48$ が成立する場合，有意水準5%で帰無仮説 $\beta_m = 0$ を棄却することができる．さらに，パラメータの推計結果の符号が解釈可能か否かを考慮して，最終的に AIC 基準[37)]

$$AIC = -2\{\ln \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - K\} \tag{2.40}$$

が最も大きくなるような説明変数の組み合わせを採用した．ただし，Kはパラメータ数であり，$\hat{\boldsymbol{\beta}}$はパラメータの最尤推計量である．以上のプロセスを経て推計した結果を**表 2-4** に示している．表中の括弧の中は尤度比を表す．説明変数 $x_1^k = 1$ は恒常的に値 1 をとり，β_{ilm}^1は定数項を表す．また，x_2^k，x_3^kはそれぞれ，

$$x_2^k = \begin{cases} 0 & \text{橋梁部の場合} \\ 1 & \text{土工部の場合} \end{cases}$$

表 2-5　推移強度の推計結果

劣化状態	ρ_{il1}	ρ_{il2}	ρ_{il3}
(0,0)	0.068	0.119	0.004
(1,1)	0.147	0.120	0.011
(1,2)	0.077	0.244	0.006
(2,1)	0.235	0.050	0.030
(2,2)	0.109	0.812	-

注）劣化状態 $(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,2)$ はマルコフ連鎖の吸収状態であり，推移強度は定義されない．

$$x_3^k = \begin{cases} 0 & \text{走行車線の場合} \\ 1 & \text{追い越し車線の場合} \end{cases}$$

という値をとるダミー変数であり，x_4^kは大型車交通量である．劣化パス $(i,j,m)=(1,1,2)$, $(1,2,3)$,　$(2,1,1)$，$(2,1,2)$，$(2,2,3)$ においては，推移強度モデルは定数項のみで構成される．以上の推計結果より，ひび割れの発生には構造特性（橋梁部，もしくは土工部）が重要な影響を及ぼすことが理解できる．これに対して，推移強度ρ_{001},ρ_{002}に対応するハザードモデルの大型車交通量のパラメータ$\beta_{001}^4,\beta_{002}^4$が，それぞれ 0.1304, 0.2259 であり，尤度比検定統計量も大きな値を示している．このことより，大型車交通量は縦ひび割れ，横ひび割れが発生するまでの期間長に大きな影響を及ぼすことが読み取れる．すなわち，大型車交通量が多いセクションほど，初期ひび割れが発生するまでの時間は短くなる．しかし，その他の推移強度では，大型車交通量は有意な影響を及ぼさず，説明変数に採用されていない．このことより，一度ひび割れが発生すれば，大型車交通量の多寡に関わらず，ひび割れが一定速度で成長していくことが理解できる．ただし，面ひび割れの初期発生に関しては，大型車交通量は有意な影響を及ぼさない．また，追い越し車線の方が，縦ひび割れが初期発生するまでの期間長が短い．しかし，横ひび割れ，面ひび割れの発生に関しては，車線による影響はほとんどない．また，一度ひび割れが発生した後に，ひび割れが進行する速度に関しても（損傷度 1 の縦ひび割れが，面ひび割れに発展するケースを除いて）車線による影響はほとんど見られない．つぎに，推計されたパラメータを用いて式(3.57b)より各劣化状態に対する推移強度を算出した．その結果を，**表 2-5** に示している．これより，ひび割れの進行過程として，同じひび割れタイプを維持する傾向が強いことが読み取れる．具体的には，横ひび割れの劣化ランク 1 の状態 (1,2) から，縦ひび割れが卓越する劣化状態 (2,1) に推移する推移強度が 0.077 であるのに対して，横ひび割れの損傷度が増加する劣化状態 (2,2) に推移する推移強度は 0.244 となっている．また，損傷度が大きくなるほどこの傾向は強くなり，例えば，横ひび割れの劣化ランク 2 の状態 (2,2) から縦ひび割れが卓越する劣化状態 (3,1) に推移する推移強度が 0.109 であるのに対して横ひび割れの損傷度

表 2-6 劣化状態の期待寿命

劣化状態	$E[\theta_{il}]$	$E[LMD_{il}^{k}]$(年)
(0,0)	0.192	5.21
(1,1)	0.278	3.60
(1,2)	0.326	3.06
(2,1)	0.315	3.17
(2,2)	0.921	1.09

注）劣化状態 $(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,2)$ はマルコフ連鎖の吸収状態であり，期待寿命は定義されない．

が増加する劣化状態 (3,2) に推移する推移強度は 0.812 となっている．さらに，縦ひび割れの方が，横ひび割れに比べて面ひび割れに発展する割合が大きいことも読み取れる．また，式 (3.57a) と式 (2.36) を用いて，各劣化状態のハザード率の期待値と期待寿命を算出した．その結果を，**表 2-6** に示している．この結果より，道路舗装を補修したのち，最初のひび割れが発生するまでの平均経過年数は５年強となる．また，ひび割れのタイプ（縦ひび割れ，横ひび割れ）に関わらず，損傷度が進行するに伴って，期待寿命が短くなる．この結果から，損傷度が大きくなるにつれて，ひび割れの進行速度が加速されることが理解できる．さらに，横ひび割れの方が，発生までの期間長やひび割れが発生してからの期待寿命が短いという結果になっている．

2.5.4 分析結果

階層型指数劣化ハザードモデルを用いて，マルコフ推移確率行列を求めよう．本章で提案したハザードモデルは，説明変数の組み合わせごとにハザード率を定義できる．言い換えれば，道路特性，車線特性別のマルコフ推移確率を推計することができる．ここでは，**2.4.4** で言及したような平均化操作を実施した平均的なハザード率を用いてマルコフ推移確率を求めた結果を**表 2-7** に示している．ただし，マルコフ推移確率行列は，１年間隔で定義されている．ここで，**表 2-7** に示すマルコフ推移確率は１年間隔の状態推移確率を示しているのに対して，前述したように数え上げで算出したマルコフ推移確率行列（**表 2-3** 参照）では，測定間隔の異なる推移結果 (平均約３年) を区別することなく単純に数え上げていることに留意して欲しい．したがって，両者を直接比較することはできないが，前者の推移確率行列を３乗して算出した測定間隔３年のマルコフ推移確率行列（**表 2-7** 中の括弧内）と相対頻度を算出した推移確率行列（**表 2-3**）を比較してみよう．当然のことながら，両者の推計結果は一致しておらず，劣化状態のペアによっては，推移確率に大きな差異が存在する．このことから，推移結果を単純に数え上げる手法は簡便ではあるものの，算出したマルコフ推移確率は十分な精度を確保できないことが理解できる．

マルコフ推移確率行列を用いれば，劣化状態分布の推移を求めることができる．いま，

表 2-7　マルコフ推移行列の推計結果（平均化操作後）

劣化状態	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(0,0)	0.825	0.054	0.092	0.004	0.007	0.012	0.001	0.001	0.004	0.000
	(0.562)	(0.102)	(0.166)	(0.010)	(0.039)	(0.045)	(0.004)	(0.018)	(0.054)	(0.001)
(1,1)	0.0	0.758	0.0	0.0	0.109	0.067	0.009	0.019	0.036	0.002
	(0.0)	(0.435)	(0.0)	(0.0)	(0.181)	(0.070)	(0.021)	(0.108)	(0.173)	(0.011)
(1,2)	0.0	0.0	0.722	0.0	0.056	0.133	0.005	0.016	0.068	0.001
	(0.0)	(0.0)	(0.376)	(0.0)	(0.088)	(0.128)	(0.011)	(0.084)	(0.307)	(0.006)
(1,3)	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(1.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)
(2,1)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.730	0.0	0.0	0.201	0.043	0.026
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0.388)	(0)	(0)	(0.456)	(0.097)	(0.059)
(2,2)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.398	0.0	0.071	0.531	0.0
	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.063)	(0.0)	(0.111)	(0.826)	(0.0)
(2,3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(1.0)	(0.0)
(3,1)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(1.0)	(0.0)	(0.0)
(3,2)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(1.0)	(0.0)
(3,3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(0.0)	(1.0)

注）マルコフ推移行列は，１年間の間に生起する状態推移確率を示している．ここでは，平均操作(４.（４）参照)を行い，当該路線の平均的なひび割れ発生，推移確率を求めたものである．なお，括弧の中の数字は，観測間隔を３年間とした場合の推移確率を表している．

１年間隔のマルコフ推移確率を$\boldsymbol{P}$と表そう．また，合計Nセクションの中で，初期時点からt年経過した時点において劣化状態(i,l) $(i=0,\cdots,3; l=0,\cdots,3)$にある平均セクション数を$n_{il}(t)$と表そう．ただし，

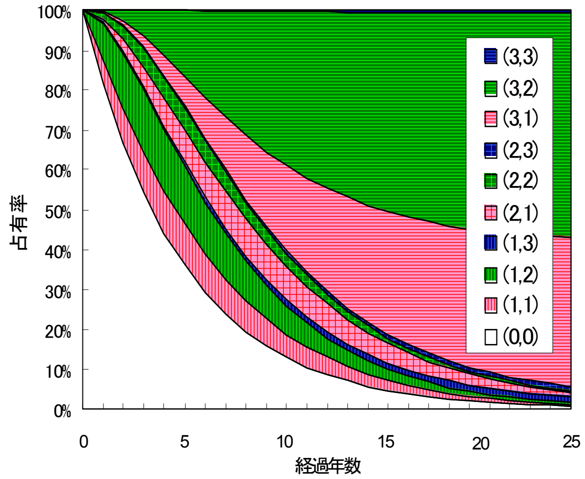
$$n_{00}(t)+\sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}n_{il}(t)=N \tag{2.41}$$

が成立する．ここで，初期時点からt年後の，平均セクション数ベクトルを$\boldsymbol{n}(t)=(n_{00}(t),n_{11}(t),\cdots,n_{33}(t))$と表そう．初期時点から$t$年後の劣化状態の平均的な劣化分布状態は，

$$\boldsymbol{n}(t)=\boldsymbol{n}(0)(\boldsymbol{P})^t \tag{2.42}$$

と表せる．ただし，$\boldsymbol{n}(0)=(1,0,\cdots,0)$である．

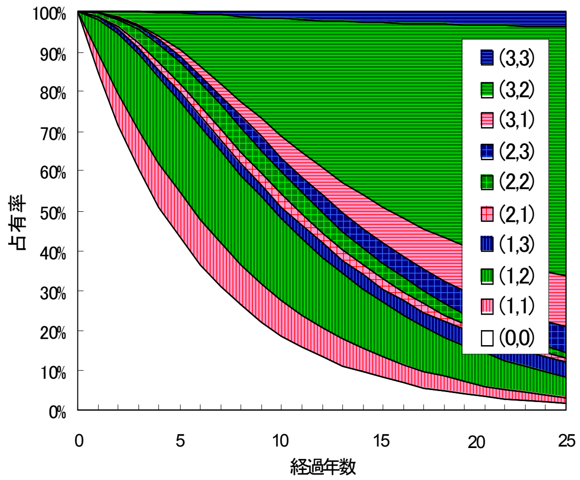
図 2-3，**図 2-4** は，土工部と橋梁部の劣化状態分布の経年変化を表している．同図では縦縞は劣化ランク１，格子は劣化ランク２，横縞は劣化ランク３を表している．また，ひび割れタイプは下から順に縦ひび割れ，横ひび割れ，面ひび割れとしている．これら２つ



注）括弧内の数字は劣化状態 (i, l) を表している．劣化状態 $(1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2)$ は吸収状態である．

図 2-3　劣化状態分布の経年変化 (土工部)

の図より，以下のような経験的事項を読み取ることができる．第１に，土工部の劣化速度の方が，橋梁部の劣化速度よりも速いことが理解できる．例えば，舗装の打ち換えが行われてから，約半数のセクションに何らかのひび割れが発生するまでに要する時間は，土工部では約 4.5 年であるのに対して，橋梁部では約５年となる．さらに，70%のセクションに何らかのひび割れが発生するまでに所要する時間は，土工部では約７年であるのに対して，橋梁部では約８年となっている．第２に，ひび割れのタイプに関しても，土工部と橋梁部の間で有意な違いを読み取れる．まず，土工部では橋梁部に比べて，面ひび割れが発生する割合がかなり低い．例えば，舗装の打ち換え後，30 年間が経過した段階で，橋梁部では 15%のセクションで面ひび割れが卓越するのに対して，土工部では 2.5%に満たない．この点に関しては，橋梁部ではエキスパンジョンで衝撃的な輪荷重が作用するために，ポットホール等が発生し，それらが面ひび割れとして評価されることに起因する．次に，縦ひび割れと横ひび割れに着目すると，橋梁部は土工部に比べて横ひび割れが発生する割合が高く，損傷度３の横ひび割れまで発展している．この点に関しても，橋梁部の横ひび割れは，繰り返し荷重による床版の疲労き裂がまずは橋軸直角方向の一方向ひび割れとなって表れる[7]ことに原因があると考えられる．したがって，橋梁部では，大規模な横ひび割れに関する修繕工事が必要となるケースが多いことが理解できる．第３に，橋梁部ではひび割れが発生したのちに，損傷度１や損傷度２の状態がある一定期間継続するが，土工部では縦ひび割れ，横ひび割れが発生すると，それ以降ひび割れが加速度的に進行することが理解できる．なお，土工部と橋梁部におけるひび割れ発生数は土工部の方が圧倒的に多い．以上の議論は，土工部と橋梁部のそれぞれのサンプル内の相対的な割合を比較したものであ



注）括弧内の数字は劣化状態 (i,l) を表している．劣化状態 $(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)$ は吸収状態である．

図 2-4　劣化状態分布の経年変化 (橋梁部)

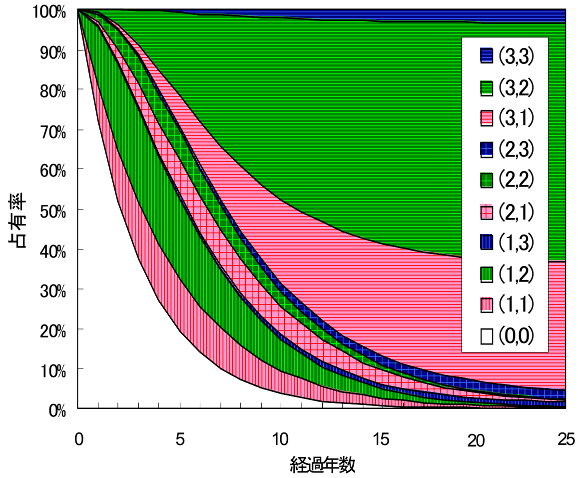
ることを断っておく．

また，大型車交通量が最大のケース（1 方向あたり 1 日約 14,000 台）と最小のケース（同約 2,700 台）について劣化状態分布の経年変化を分析した結果を**図 2-5**，**図 2-6** に示している．この図より，大型車交通量が道路舗装の初期劣化速度に大きく影響していることが理解できる．例えば，舗装を打ち換えてから，ひび割れが発生するまでの期間は，交通量が最大の場合では 3 年，交通量が最小の場合では 11 年となっている．しかし，**表 2-4** からも読み取れるように，交通量は初期ひび割れが発生する際には多大な影響を与えるものの，それ以降のひび割れの進行に関しては影響を与えていない．また，交通量は劣化タイプの割合に関しては劣化ランク 1 の状態以外にはほとんど寄与しないことも理解できる．劣化ランク 1 に関しては交通量が多いほど縦ひび割れ，横ひび割れの生起する確率が増えるため，それらが全体に占める割合は増加する．

以下，結果の図示は割愛するが，実証分析を通して得た知見を記述する．ひび割れの進展に関しては，交通量最大の土工部，橋梁部，交通量最小の土工部，橋梁部の順に，ひび割れが発生するまでの期間長が長くなる．例えば，30%のセクションにひび割れが発生するまでに要する期間長は，それぞれ 4.5 年，5 年，11.5 年，16.5 年であり，その差は最大で 12 年に達する．また，道路車線はひび割れの劣化過程にあまり影響していないことも確認済である．なお，これらは**表 2-4** で考察した結果とも整合的であることを付記しておく．

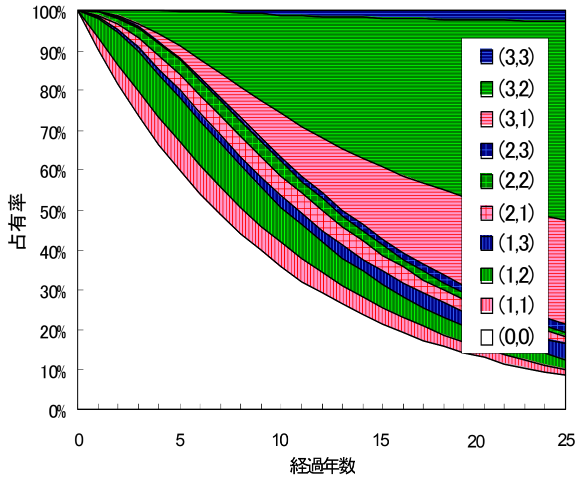
2.6　結言

本章では，道路舗装のひび割れによる劣化状態を，損傷度とひび割れ形態という 2 つの状態変数で表現した．その上で，劣化状態間の推移確率を階層型指数劣化ハザードモデル



注）括弧内の数字は劣化状態 (i, l) を表している．劣化状態 $(1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2)$ は吸収状態である．

図 2-5　劣化状態分布の経年変化 (大型車交通量最大区間)



注）括弧内の数字は劣化状態 (i, l) を表している．劣化状態 $(1,3), (2,3), (3,3), (3,1), (3,2)$ は吸収状態である．

図 2-6 劣化状態分布の経年変化 (大型車交通量最小区間)

で表現するとともに，ひび割れの進行状況を階層的ネットワーク特性を有するマルコフ過程として記述する方法を提案した．さらに，道路舗装のひび割れに関する定期測定結果に基づいて，ハザードモデルを推計し，道路の構造特性，舗装特性，および交通条件件が道路舗装のひび割れ過程に及ぼす影響について分析した．さらに，東関東自動車道におけるひび割れに関する測定結果に基づいて，ひび割れ進行過程に関する実証的な知見を得ることができた．今後，他の高速道路路線を対象とした適用事例を蓄積することにより，モデルの適用性を広げる努力が必要である．また，本章で提案した方法論は，道路舗装のひび割れ過程だけでなく，多元的な特性を持つ土木構造物の劣化過程の分析に幅広く適用可能である．本章で提案した方法論に関して，今後以下のような研究課題が残されている．第１に，本章では同一損傷度内における劣化状態間の推移過程を考慮していない．劣化過程が，同一損傷度内の劣化状態間の推移関係が存在するようなネットワーク形態を有する場合，劣化状態間の推移確率を解析的に求めることは不可能となる．**3章**では上記のような劣化過程を考慮に入れたモデルを提案し，MCMC法を用いて推移確率を推計している．第２に，舗装の劣化状態に関する測定誤差の問題が考えられる．本章の適用事例で用いたデータベースは良好な測定精度を有しており，ハザードモデルの推計にあたって測定誤差が問題となることはなかった．しかし，測定精度が十分でないようなデータベースを用いてハザードモデルを推計するためには，測定誤差分布を考慮したようなモデルを開発することが必要となる．**4章**では，隠れマルコフモデルを用いて，点検結果に測定誤差が含まれる劣化過程をモデル化している．第３に，簡便なひび割れ劣化過程の推計モデルを開発することも必要である．本研究では，ひび割れ損傷度とひび割れ形態という２種類の状態変数に関する測定結果が蓄積されているデータベースを用いている．しかし，このような精緻なデータベースが利用可能でない場合も少なくない．この場合，より簡便なひび割れ進行予測モデルを開発することが必要となろう．最後に，本研究で推計したマルコフ推移行列を用いて，ひび割れ補修のために必要となるライフサイクル費用を求めることが可能である．ひび割れ補修工法と計画が与えられれば，容易にライフサイクル費用を推計することができる．また，道路舗装のアセットマネジメントを行う立場からは，わだち掘れ，平坦性，段差等，他の原因で発生する道路舗装の劣化事象の発生・進行プロセスとの競合関係を考慮したライフサイクル費用評価の方法論を開発することが必要である．

表 3-1 ひび割れ状態の表現方法

損傷度	ひび割れタイプ		
	縦ひび割れ	横ひび割れ	面ひび割れ
$i=0$		$(0,0)$	
$i=1$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$i=2$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$i=3$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$

3 競合的劣化予測モデル

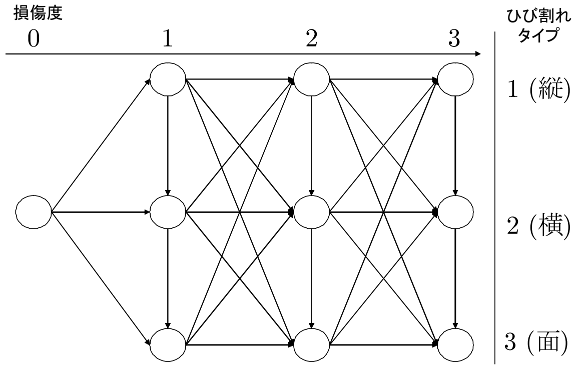
3.1 緒言

2章では，ひび割れ進行過程を損傷度とひび割れタイプという2種類の離散的状態変数を用いて表現し，複数のタイプのひび割れ過程の進行を同時に考慮したような階層型指数劣化ハザードモデルを提案した．階層型指数劣化ハザードモデルでは，劣化状態間の推移を推移強度を用いて直接的に表現することにより，劣化過程全体をマルコフ過程として扱うことができた．マルコフ性を満たす推移過程は操作性が高く，階層型指数劣化ハザードモデルは望ましい性質を有しているといえる．しかし，複数の劣化事象によって劣化過程を表現する場合，劣化過程は厳密にはマルコフ性を満たさない．また，階層型指数劣化ハザードモデルはひび割れ発生過程全体としての進行速度管理のために有用な情報を作成するが，各タイプのひび割れ発生メカニズムや進行管理に関しては十分な情報を作成できないという問題がある．

以上の問題意識から，本章では，路面性状調査結果に基づいて，ひび割れタイプごとの進行過程を表現する供用性曲線を推定する方法論を提案する．具体的には，個々のひび割れタイプごとに，それぞれの劣化メカニズムに従って，ひび割れ過程が進行する．そのうち，路面性状調査では，対象となる道路区間の中で，もっとも損傷が著しい劣化過程に関する情報のみが観測される．本章では，複数タイプのひび割れ過程間の競合関係を表現する競合的劣化ハザードモデルを提案するとともに，各タイプのひび割れ過程を供用性曲線として個別に推定する方法論を提案する．競合的劣化ハザードモデルを用いることにより，タイプ別供用性曲線を推計する場合に発生するサンプル選択バイアスの問題を回避することが可能となる．さらに，実データを用いた分析により，提案した方法論の有効性を実証的に検証する．以下，**3.2節**で本章の基本的な考え方を説明する．**3.3節**では，競合的劣化ハザードモデルを定式化する．**3.4節**で競合的劣化ハザードモデルの推計方法を提案する．さらに，**3.5節**で，実測データを用いた実証分析を通して提案手法の有効性を検証する．

3.2 本章の基本的な考え方

3.2.1 ひび割れ進行過程

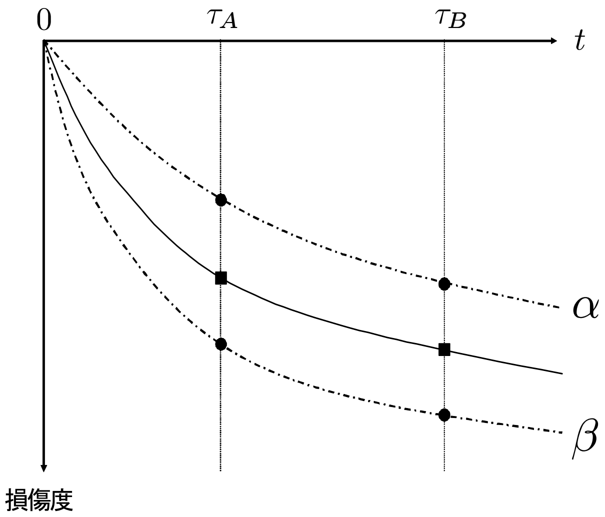


注) 図中の○は劣化状態を表している．劣化状態は損傷度 i $(i=0,1,2,3)$ とひび割れタイプ l $(l=1,2,3)$ の組 (i,l) として表現される．ひび割れ過程は劣化状態 $(0,0)$ から，右方向へ移動するパターンで進行する．

図 3-1 ひび割れ進行過程

2章と同様に，道路舗装のひび割れ状態を，ひび割れの程度の大きさを表す損傷度と，舗装のひび割れタイプを表すひび割れタイプという2種類の離散変数を用いて表現する．状態変数 i $(i=0,1,\cdots,I)$ は損傷度を表し，$i=0$ はひび割れが発生していない状況を，$i=I$ はひび割れがもっとも進行した状態を意味する．損傷度が $i=I$ に到達した場合には，直ちに道路舗装の補修が実施される．一方，ひび割れのタイプを状態変数 l $(l=0,\cdots,L)$ で表現する本章の適用事例では，ひび割れタイプとして，縦ひび割れ，横ひび割れ，面ひび割れという3つのタイプを取り上げている．ただし，$l=0$ は，ひび割れが発生していない状態を表す．したがって，初期状態のみ $(0,0)$ で表現され，ひび割れが発生した段階で損傷度は状態変数 i $(i=1,\cdots,I)$，劣化状態は l $(l=1,\cdots,L)$ を用いて定義される．以上の2種類の状態変数を用いて，舗装のひび割れ状態を，損傷度 i $(i=1,\cdots,I)$ と，ひび割れタイプ l $(l=1,\cdots,L)$ のペア (i,l) で表そう．以下，状態変数のペア (i,l) を劣化状態と呼ぶ．**表 3-1** には，本章の適用事例で用いる劣化状態をリストアップしている．本適用事例では，状態変数 (i,l) の上限値 (I,L) は，$(3,3)$ に設定されている．

舗装表面を一定の区画に分割するとともに，各区画ごとに，ひび割れの損傷度とひび割れタイプを定義する．その場合，1つの区画の中に複数のひび割れが存在する可能性も少なくない．その際，最も損傷度の大きいひび割れに着目し，その区画の劣化状態を定義する．ここで，たとえば損傷度 $i=2$，横ひび割れ $l=2$ (すなわち，劣化状態 $(2,2)$) と判定されたある道路区画に着目する．この道路区画において，縦ひび割れや面ひび割れが発生していても，損傷度が $i=1$ である限り，その区画の劣化状態の判定結果は $(2,2)$ である．さらに，ある測定時点で，縦ひび割れ $(l=1)$ と横ひび割れ $(l=2)$ の損傷度がともに $i=1$



注) 実線は，縦ひび割れの供用性曲線を，1 点鎖線は，横ひび割れのサンプルパスを表している．調査時点τ_A，τ_Bにおいて，横ひび割れ過程を表すサンプルパスαが，実線より上側に位置すれば縦ひび割れが，サンプルパスβが，下方に位置すれば横ひび割れが代表タイプとして選択される．

図 3-2 動的サンプル選択バイアス

である場合も考える．この場合，ひび割れのタイプにより，どちらが選択されるかというルールを設けておく必要がある．当該の高速道路の路面性状調査では，面ひび割れ，横ひび割れ，縦ひび割れという順序で，ひび割れタイプが選択されることになっている．したがって，同一の損傷度であれば，lの値が大きい方が，当該区間を代表するひび割れと判定されると考える．**図 3-1** は，劣化状態の進行過程の事例を表現している．同図に示すように，各ひび割れタイプごとに，ひび割れが進行し，損傷度が増加していく．いま，時点τ_Aにおいて，3 つのタイプのひび割れの状態 (i,l) が，それぞれ $(2,1),(2,2),(1,3)$ である場合を考える．この時，先に言及したルールより，当該区間の劣化状態は $(2,2)$ と判定されることになる．それぞれのひび割れ過程において，状態 $i=3$ は終局状態 (吸収状態) である．このように，路面性状調査では，もっともひび割れが進行した状態にあるひび割れのタイプと損傷度のみが記録される．それ以外のタイプのひび割れも進行しているが，調査時点において，それよりも損傷が進展しているひび割れが存在するために，たまたま記載されていないことも起こりえる．その結果，調査時点以降に，別のタイプのひび割れが進行し，つぎの調査時点で，当該区間を代表するひび割れのタイプが変化することも起こりえる．

3.2.2　動的サンプル選択バイアス

路面性状調査では，舗装のひび割れに関する劣化状態が記録されるが，もっとも損傷が進んだタイプのひび割れに関する情報のみが記録され，それ以外のタイプのひび割れに関する情報は獲得できない．そのことに起因して，各タイプのひび割れ過程を個別に推計しようとすれば，推計結果のシステム的なバイアスが生まれるという代表値問題が発生する．すなわち，路面性状調査では，代表値のみが記録されるため，ともすれば進行が速いひび割れのみが偏ってサンプリングされ，進行度の遅いひび割れ (以下，隠れたタイプのひび割れと呼ぶ) に関する情報が不足するというサンプル選択バイアスが発生する．さらに，このようなサンプル選択バイアスが，時間の経過とともに変動するという動的サンプル選択バイアスが発生する．このことを**図 3-2** を用いて説明する．2 つの調査時点τ_A，τ_Bを考える．図中の実線は，例えば縦ひび割れの平均的な劣化曲線 (以下，供用性曲線と呼ぶ) を表している．1 点鎖線は，横ひび割れのサンプルパスを表している．ひび割れ過程には，多くの不確実性が含まれるため，供用性曲線に沿ってひび割れが進行するとは限らない．ここで，議論を簡単にするために，縦ひび割れに関しては，実線通りひび割れが進行すると考える．また，面ひび割れ過程を無視する．一方，横ひび割れに関しては，図の破線のように多くのひび割れ過程が考えられる．調査時点τ_A，τ_Bにおいて，横ひび割れ過程を表すサンプルパス (例えば，サンプルパスα) が，実線より上側に位置すれば，縦ひび割れがひび割れの代表タイプとして選択される．しかし，サンプルパスβのように，下方に位置している場合，横ひび割れが代表タイプとして選択される．いずれのタイプのひび割れが代表値として選択されるかは，各タイプのひび割れ過程の競合の結果として求まる．しかし，時間の経過により，ひび割れ過程が進展していくため，ひび割れタイプ間の競合関係が時間とともに変化していく．その結果，隠れたタイプのひび割れに関する情報が，システム的に欠損するというサンプル選択バイアスの生成メカニズムも時間とともに変化していく．したがって，路面性状調査結果に基づいて，各ひび割れタイプの供用性曲線を求める場合，動的サンプル選択バイアスを考慮に入れた推計方法を開発することが必要となる．ここで，路面性状調査において，隠れたタイプのひび割れの損傷度に関する情報がまったく得られないわけではないことに留意する必要がある．隠れたタイプのひび割れに関しても,「その損傷度は，代表タイプとして選択されたひび割れの損傷度より大きくない」という部分的な情報を獲得することができる．本章で提案する競合的劣化ハザードモデルを用いることにより，隠れたタイプのひび割れに関しても，上述のような部分情報を積極的に活用することにより，動的サンプル選択バイアスの問題を解消することが可能となる．その結果，路面性状調査により代表タイプのひび割れの記録のみを用いて，各タイプのひび割れ過程の供用性曲線を獲得することが可能となる．

3.3　競合的劣化ハザードモデル

3.3.1　競合的推移確率

いま，カレンダー時間軸上の時刻τ_0を起点$y=0$とするサンプル時間軸を考える．初期時刻τ_0において，舗装の補修が実施され，劣化状態が初期状態$(0,0)$に更新される．初期時刻を起点として，舗装の劣化が進展すると考える．サンプル時間軸上の点を時点と呼び，カレンダー時間軸上の時刻とは区別する．2つの連続する時点yと$y+z$を考える．2つの時点間の時間間隔をzと表そう．2つの時点間における舗装状態の不確実な推移状態を状態間推移確率で表現する．時点yで測定したひび割れ状態を状態変数$h(y)=(i,l)$ $(i=0,\cdots,I;l=0,\cdots,L)$を用いて表そう．状態間推移確率は，時点$y$で測定された劣化状態$h(y)=(i,l)$を与件とし，つぎの時点$y+z$において劣化状態$h(y+z)=(j,m)$ $(j=0,\cdots,I;m=0,\cdots,L)$が選択される条件付確率 (以下，競合的推移確率と呼ぶ) を用いて定義できる．すなわち，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Prob}[h(y+z)=(j,m)|h(y)=(i,l)]\\
&=\frac{\mathrm{Prob}[h(y+z)=(j,m),h(y)=(i,l)]}{\mathrm{Prob}[h(y)=(i,l)]}\\
&=\pi_{il,jm}(y,z)
\end{aligned}\tag{3.1}$$

と表せる．競合的推移確率$\pi_{il,jm}(y,z)$は，推移確率が定義される時間間隔zだけでなく，初期時点からの経過時間yにも依存している．すなわち，代表タイプのひび割れのみを用いて定義される競合的推移確率には，**3.2.4**で言及したような動的システム選択バイアスが発生する．さらに，**3.3.4**で議論するように，競合的推移確率は，マルコフ性を満足していない．このような推移確率をすべての劣化状態ペア(il,jm)に対して求めれば，競合的推移確率行列

$$\boldsymbol{\Pi}(y,z)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\pi}_{00}(y,z) & \cdots & \boldsymbol{\pi}_{0I}(y,z)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{o} & \cdots & \boldsymbol{\pi}_{II}(y,z)\end{pmatrix}\tag{3.2}$$

を定義できる．ただし，$\mathbf{o}$は0要素行列，$\boldsymbol{\pi}_{ij}(y,z)$ $(i,j=0,\cdots,I)$はブロック行列であり，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_{00}(y,z)&=\pi_{00,00}(y,z)\\
\boldsymbol{\pi}_{0j}(y,z)&=\begin{pmatrix}\pi_{00,j1}(y,z) & \cdots & \pi_{00,jL}(y,z)\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{\pi}_{ij}(y,z)&=\begin{pmatrix}\pi_{i1,j1}(y,z) & \cdots & \pi_{i1,jL}(y,z)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \pi_{iL,j1}(y,z) & \cdots & \pi_{iL,jL}(y,z)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と表される．競合的推移確率(4.1)は，連続する2つの時点t，$t+1$の間において生じる劣化状態間の推移確率を示したものである．当然のことながら，対象とする測定間隔が異なれば，

推移確率の値は変化する．補修がない限り常に劣化が進行するので，$\pi_{il,jm}(y,z) = 0$ $(i > j)$ が成立する．また，推移確率の定義より $\sum_{j=i}^{I}\sum_{m=0}^{L}\pi_{il,jm}(y,z) = 1$ が成立する．すなわち，競合的推移確率に関して

$$\left.\begin{array}{l}\pi_{il,jm}(y,z) \geq 0 \\ \pi_{il,jm}(y,z) = 0 \ (i > j\text{の時}) \\ \sum_{j=i}^{I}\sum_{m=0}^{L}\pi_{il,jm}(y,z) = 1\end{array}\right\} \tag{3.3}$$

が成立しなければならない．状態 (I,m) $(m = 1,\cdots,L)$ に関しては，補修のない限り，$\pi_{Im,Im}(y,z) = 1$ が成立すると考える．

3.3.2　多段階指数劣化ハザードモデル

競合的劣化ハザードモデルは，各道路区間において複数のタイプのひび割れが相互に独立して発展するが，その中で劣化状態が一番進展したタイプのひび割れが，当該区間を代表するひび割れとして選択されるメカニズムを記述している．個々のタイプのひび割れ過程が，初期時点からの経過時間に依存しない斉次マルコフ過程に従う場合でも，複数の劣化過程の競合の結果として観測されるひび割れ過程は斉次性を満足しない．本節では，ある特定のタイプのひび割れ過程のみに着目し，ひび割れ過程を多段階指数劣化ハザードモデルを用いて表現する．競合的劣化ハザードモデルは，多段階指数劣化ハザードモデルを用いて表現されるタイプごとのひび割れの進行過程のうち．もっとも劣化が進展したタイプのひび割れ過程のみが，代表的ひび割れ過程として選択されるメカニズムとして表現される．

各タイプごとのひび割れ過程を，多段階指数劣化ハザードモデル[23)]を用いて表現する．ここでは，読者の便宜を図るため，多段階指数劣化ハザードモデルを簡単に紹介しておく．いま，ひび割れタイプ l $(l = 1,\cdots,L)$ の中から1つのひび割れタイプ l^* のみに着目する．タイプ l^* のひび割れ過程に着目すれば，ひび割れ過程の進展により，劣化状態は $(0,0) \rightarrow (1,l^*) \rightarrow \cdots \rightarrow (I,l^*)$ と展開する．いま，劣化状態 (i,l^*) から，劣化状態 $(i+1,l^*)$ に推移する推移強度を θ_{il^*} と表そう．ただし，初期状態 $(0,0)$ から $(1,l^*)$ への推移強度は θ_{0l^*} で表現される．劣化状態 (i,l^*) $(i = 0,\cdots,I-1)$ の寿命を確率変数 ζ_{il^*} で表す．劣化状態 (i,l^*) の寿命 ζ_{il^*} が，確率密度関数 $f_{il^*}(\zeta_{il^*})$，分布関数 $F_{il^*}(\zeta_{il^*})$ に従うと仮定する．時点 t における劣化状態が (i,l^*) であり，そこから時間 z_{il^*} が経過した時点 $t+1$ で劣化状態 (i,l^*) が終了する確率密度をハザード関数 $\lambda_{il^*}(z_{il^*})$ を用いて表現する．この時，ハザード関数は，供用時間 z_{il^*} まで劣化状態が (i,l^*) のまま継続する生存確率 $\tilde{F}_{il^*}(z_{il^*})$ を用いて，

$$\lambda_{il^*}(z_{il^*})\Delta z_{il^*} = \frac{f_{il^*}(z_{il^*})\Delta z_{il^*}}{\tilde{F}_{il^*}(z_{il^*})} \tag{3.4}$$

と表せる．すなわち，ハザード関数 $\lambda_{il^*}(z_{il^*})$ は，初期時点から時間 z_{il^*} が経過するまで劣化状態 (i,l^*) の状態が継続したという条件の下で，微小期間 $[z_{il^*}, z_{il^*} + \Delta z_{il^*})$ 中に劣化状

態 (i,l^*) が終了する条件付確率である．ハザード関数が経過時間 z_{il^*} に依存せず，常に一定値 $\theta_{il^*} > 0$ をとる場合，指数ハザード関数

$$\lambda_{il^*}(z_{il^*}) = \theta_{il^*} \tag{3.5}$$

が成立する．指数ハザード関数 (3.5) を用いることにより，タイプ l^* のひび割れ過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現することが可能となる．式 (3.4) より，

$$\lambda_{il^*}(z_{il^*}) = \frac{f_{il^*}(z_{il^*})}{\tilde{F}_{il^*}(z_{il^*})} = -\frac{\frac{d\tilde{F}_{il^*}(z_{il^*})}{dz_{il^*}}}{\tilde{F}(z_{il^*})} = \frac{d}{dz_{il^*}}\left\{-\log \tilde{F}_{il^*}(z_{il^*})\right\} \tag{3.6}$$

と変形できる．ここで，$\tilde{F}_{il^*}(0) = 1 - F_{il^*}(0) = 1$ を考慮し，式 (3.6) を積分すれば

$$\begin{aligned}\int_0^{z_{il^*}} \lambda_{il^*}(u)du &= [-\log \tilde{F}_{il^*}(u)]_0^{z_{il^*}} \\ &= -\log \tilde{F}_{il^*}(z_{il^*})\end{aligned} \tag{3.7}$$

を得る．ハザード関数 $\lambda_{il^*}(z_{il^*}) = \theta_{il^*}$ を用いれば，劣化状態 (i,l^*) の寿命が z_{il^*} 以上となる確率 $\tilde{F}_{il^*}(z_{il^*})$ は

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{il^*}(z_{il^*}) &= \exp\left\{-\int_0^{z_{il^*}} \lambda_{il^*}(u)du\right\} \\ &= \exp(-\theta_{il^*} z_{il^*})\end{aligned} \tag{3.8}$$

と表される．すなわち，指数ハザードモデルが得られる．また，式 (3.8) より，劣化状態 (i,l^*) の寿命分布を表す確率密度関数 $f_{il^*}(z_{il^*})$ は次式で示される．

$$f_{il^*}(z_{il^*}) = \theta_{il^*} \exp(-\theta_{il^*} z_{il^*}) \tag{3.9}$$

いま，サンプル時間軸上の時点 $\tau_A = y$ と $\tau_B = y + z$ に測定が実施される場合を考える．さらに，時点 $\tau_1 (\leq \tau_A)$ に劣化状態 (i,l^*) に推移し，測定時点 τ_A まで劣化状態 (i,l^*) が継続した場合を考える．すなわち，時点 τ_A における測定で，劣化状態が (i,l^*) であることが判明したとする．この時，時点 τ_A で，劣化状態が (i,l^*) であったという条件の下で，さらに時点 τ_A から追加的に z_{il^*} (≥ 0) 以上にわたって劣化状態 (i,l^*) が継続する確率 $\tilde{F}_{il^*}(\tau_A + z_{il^*}|\zeta_{il^*} \geq \tau_A)$ は

$$\tilde{F}_{il^*}(\tau_A + z_{il^*}|\zeta_{il^*} \geq \tau_A) = \mathrm{Prob}\{\zeta_{il^*} \geq \tau_A + z_{il^*}|\zeta_{il} \geq \tau_A\} \tag{3.10}$$

と定義できる．確率 $\tilde{F}_{il^*}(z_{il^*})$ の定義より，

$$\frac{\mathrm{Prob}\{\zeta_{il^*} \geq \tau_A + z_{il^*}\}}{\mathrm{Prob}\{\zeta_{il^*} \geq \tau_A\}} = \frac{\tilde{F}_{il^*}(\tau_A + z_{il^*})}{\tilde{F}_{il^*}(\tau_A)} \tag{3.11}$$

が成立する．式 (3.8) より，上式の右辺は

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{F}_{il^*}(\tau_A+z_{il^*})}{\tilde{F}_{il^*}(\tau_A)}&=\frac{\exp\{-\theta_{il^*}(\tau_A+z_{il^*})\}}{\exp(-\theta_{il^*}\tau_A)}\\&=\exp(-\theta_{il^*}z_{il^*})\end{aligned} \tag{3.12}$$

と変形できる．すなわち，測定時点τ_Aにおいて劣化状態が (i,l^*) であり，次の測定時点$\tau_B=\tau_A+z$においても劣化状態が (i,l^*) に留まる確率は

$$\begin{aligned}p_{ii}^{l^*}(z)&=\mathrm{Prob}[h(\tau_B)=(i,l^*)|h(\tau_A)=(i,l^*)]\\&=\exp(-\theta_{il^*}z)\end{aligned} \tag{3.13}$$

と表される．ただし，zは 2 つの測定時点の間隔を表す．つぎに，測定時点τ_Aと$\tau_B=\tau_A+z$の間で，タイプ l^*のひび割れの損傷度が i から $j\ (>i)$ に推移する推移確率 $p_{ij}^{l^*}(z)$ は，

$$\begin{aligned}p_{ij}^{l^*}(z)&=\mathrm{Prob}[h(\tau_B)=(j,l^*)|h(\tau_A)=(i,l^*)]\\&=\sum_{k=i}^{j}\prod_{m=i}^{k-1}\frac{\theta_{ml^*}}{\theta_{ml^*}-\theta_{kl^*}}\prod_{m=k}^{j-1}\frac{\theta_{ml^*}}{\theta_{(m+1)l^*}-\theta_{kl^*}}\exp(-\theta_{kl^*}z)\\&(i=0,\cdots,I-1;j=i+1,\cdots,I)\end{aligned} \tag{3.14}$$

と表すことができる[23]．ただし，表記上の規則として，

$$\begin{cases}\prod_{m=i}^{k-1}\frac{\theta_{ml^*}}{\theta_{ml^*}-\theta_{kl^*}}=1 & (k\leq i+1\text{の時})\\ \prod_{m=k}^{j-1}\frac{\theta_{ml^*}}{\theta_{(m+1)l^*}-\theta_{kl^*}}=1 & (k\geq j\text{の時})\end{cases}$$

が成立すると考える．また，$p_{iI}^{l^*}(z)$ に関してはマルコフ推移確率の条件より次式が成立する．

$$p_{iI}^{l^*}(z)=1-\sum_{j=i}^{I-1}p_{ij}^{l^*}(z)\ (i=0,\cdots,I-1) \tag{3.15}$$

以上のように，タイプごとのひび割れ進展過程を表現した推移確率 $p_{ij}^{l^*}(z)\ (i=0,\cdots,I-1;j=0,\cdots,I;l^*=0,\cdots,L)$ を，以下ではタイプ別マルコフ推移確率と呼ぶ．タイプ別マルコフ推移確率は，推移確率が定義される時間間隔zのみに依存しており，斉次マルコフ推移確率になっている．

ハザード率θ_{il}を用いれば，タイプ l，損傷度 i のひび割れが発生した時点から，タイプ lのひび割れが進行し，損傷度 $i+1$ に進むまでの期待期間長 $RMD_{i,l}\ (i=1,\cdots,I-1;l=1,\cdots,L)$ は，

$$RMD_{il}=\int_0^\infty\tilde{F}_{il}(z|\theta_{il})dz=\theta_{il}^{-1} \tag{3.16}$$

と表される．したがって，初期時点からタイプ lのひび割れの損傷度が $j\ (>1)$ に推移するまでに要する平均的な経過時間 $ET_{jl}\ (j=2,\cdots,I)$ は

$$ET_{jl}=\sum_{i=1}^{j}\theta_{il}^{-1} \tag{3.17}$$

と表される．式 (4.13) を用いて，損傷度 j $(j=1,\cdots,I)$ と平均的な経過時間 $ET_j(\boldsymbol{x})$ の関係 (以下，供用性曲線と呼ぶ) を求めることができる．

3.3.3　競合的劣化ハザードモデルの導出

以上では，ある特定のタイプ l^* のひび割れ過程に着目し，その進展過程が多段階指数劣化ハザードモデルで表現されることを示した．つぎに，個々のタイプ n $(n=1,\cdots,L)$ のひび割れ過程が各々独立に進行すると仮定する．その上で，最も劣化が進行したタイプのひび割れ過程のみが，記録に残されると考える．この時，複数のタイプのひび割れ事象の中で，当該区間を代表するひび割れ事象を選択するルールを決定しておく必要がある．本章では，複数のタイプのひび割れの中で，損傷度がもっとも大きいタイプのひび割れ事象を当該区間のひび割れとして代表させることとする．さらに，複数のタイプのひび割れ事象が，同一の損傷度に位置している場合，舗装マネジメントを実施するうえで，より重要なタイプのひび割れタイプが選択されると考える．ひび割れタイプを表す状態変数 $n=1,\cdots,L$ が，状態変数の値が大きくなるほど，管理上より深刻なひび割れタイプとなるように序列化されていると考える．いま，着目している道路区間において，タイプ n $(n=1,\cdots,L)$ のひび割れの損傷度が，それぞれ i_n $(n=1,\cdots,L)$ であると判明している．この場合，その区間の劣化状態として記録される劣化状態 (i,l) は，

$$\begin{cases} i=\max\{i_n\ (n=1,\cdots,L)\} \\ l=\max\{n|i_n=i\ (n=1,\cdots,L)\} \end{cases} \tag{3.18}$$

として定義できる．複数のタイプのひび割れが発生する場合，当該の道路区間を代表するひび割れ事象は選択ルール (3.18) に従って選択されたタイプのひび割れのみが記録される．すなわち，記録されなかったタイプのひび割れに関しては，真の損傷度に関する情報は獲得できず，そのタイプのひび割れが「代表的なひび割れとして選択されなかった」という情報のみが獲得可能である．したがって，記録されなかったタイプ n のひび割れ過程の損傷度 i_n $(n\neq l)$ に関して，

$$\begin{cases} i_n \leq i \quad (n=1,\cdots,l-1) \\ i_n < i \quad (n=l+1,\cdots,L) \end{cases} \tag{3.19}$$

が成立する．

このように競合的劣化ハザードモデルでは，一部のひび割れ過程の情報のみが観測可能である．以上の点に留意しながら，競合的推移確率 $\pi_{il,jm}(y,z)$ $(i,j=0,\cdots,I;l,m=0,\cdots,L)$ を，多段階指数劣化ハザードモデルで求めた各タイプのひび割れ過程における推移確率 (3.1),(3.14),(3.15) を用いて表現する．劣化状態 (i,l) から，劣化状態 $(i+1,l)$ に推移する推移強度を θ_{il} と表そう．ただし，初期状態 $(0,0)$ からは，劣化状態 $(1,n)$ $(n=1,\cdots,L)$ のい

ずれか1つに進展することができる．したがって，劣化状態$(0,0)$が終了する推移強度は

$$\theta_{00} = \sum_{n=1}^{L} \theta_{0n} \tag{3.20}$$

と表せる．時点$t=\tau_A$で測定された道路の劣化状態を$h(\tau_A)=(i,l)$，$t=\tau_B$で測定された道路の劣化状態を$h(\tau_B)=(j,m)$とする．測定間隔$z=\tau_B-\tau_A$の間に劣化状態が(i,l)から(j,m)に推移する確率$\pi_{il,jm}(y,z)$は，以下のように定式化できる．

a) $i=j=0$のとき

初期状態$(0,0)$は，劣化状態$(1,n)$ $(n=1,\cdots,L)$の内の，いずれか1つに推移すれば終了する．初期状態$(0,0)$が終了する推移強度は，式(3.20)で定義される．したがって，時点tから，期間長zにわたって，初期状態$(0,0)$に止まる確率$\pi_{00,00}(y,z)$は，

$$\pi_{00,00}(y,z) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{L} \theta_{0,n} z\right) \tag{3.21}$$

と定式化できる．すなわち，競合的推移確率$\pi_{00,00}(y,z)$は，時点tに依存せず，期間長zのみに依存する．

b) $j \neq 0,\ l \neq m$のとき

つぎに，$j \neq 0$の場合をとりあげる．この場合，複数のタイプのひび割れ過程の中で，代表的なひび割れ事象のみが劣化事象(i,l)として記録される．2つの測定時点$\tau_A=y$, $\tau_B=y+z$において，劣化状態(i,l)，(j,m)が観測され，異なるタイプのひび割れが記録された場合に着目する．測定時点τ_Aでは，舗装の補修が実施されて(劣化状態が$(0,0)$に回復して)から，時間yが経過している．時点yで測定された劣化状態$h(y)=(i,l)$を与件とし，つぎの時点$y+z$において劣化状態$h(y+z)=(j,m)$ $(j=1,\cdots,I;m=1,\cdots,L)$が選択される条件付確率(以下，競合的推移確率と呼ぶ)は式(3.1)で定義される．同式を再掲する．

$$\pi_{il,jm}(y,z) = \frac{\mathrm{Prob}[h(y+z)=(j,m),h(y)=(i,l)]}{\mathrm{Prob}[h(y)=(i,l)]} \tag{3.22}$$

上式の分子は，2つの測定時点において，劣化状態(i,l)，(j,m)が同時に生起する確率を表している．これら2つの劣化状態が同時に生起するためには，1) 時点τ_Aにおいて，タイプlのひび割れが代表(劣化状態i)に選ばれ，時点τ_Bにおいて，タイプlのひび割れ過程が代表に選ばれないこと(事象1)，2) 時点τ_Aにおいて，タイプmのひび割れが代表に選ばれず，時点τ_Bに代表値(j,m)に選ばれること(事象2)，3) それ以外のタイプのひび割れが，2つの時点において同時に代表に選ばれないこと(事象3)，という3つの排他的な事象が同時に生起しなければならない．

まず，事象1に着目する．時点τ_Aにおいて，タイプlのひび割れが損傷度iとなる確率は$p^l_{0i}(y)$と表せる．さらに，時点τ_Bにおいて代表として選ばれないためには，タイプlの時点τ_Bにおける損傷度j_lが

$$\begin{cases} i \leq j_l \leq j & l < m \text{の時} \\ i \leq j_l < j & l > m \text{の時} \end{cases} \tag{3.23}$$

を満足しなければならない．したがって，事象1が生起する確率は

$$P_1(y,z) = p^l_{0i}(y) \sum_{t=i}^{\tilde{j}_l} p^l_{it}(z) \tag{3.24}$$

と表される．ただし，$p^l_{it}(z)$は，タイプlのひび割れが，期間zにおいて，損傷度iからtへ推移する確率であり，多段階指数劣化ハザードモデルを用いて，式(3.13),(3.14),(3.15)のように表現される．また，添え字$\tilde{j}_l$は

$$\tilde{j}_l = \begin{cases} j & l < m \\ j-1 & l > m \end{cases} \tag{3.25}$$

を意味する．

つぎに，事象2に着目する．時点τ_Aにおいて，タイプmのひび割れの損傷度が代表値iに選ばれないためには，測定時点τ_Aにおいて，タイプ$m \neq l$の損傷度が

$$\begin{cases} i_m \leq i & l > m \text{の時} \\ i_m < i & l < m \text{の時} \end{cases} \tag{3.26}$$

を満足しなければならない．その上で，時点τ_Bにおいて，タイプmのひび割れが損傷度jに推移する同時生起確率は

$$P_2(y,z) = \sum_{s=0}^{\tilde{i}_m} p^m_{0s}(y) p^m_{sj}(z) \tag{3.27}$$

と表せる．

最後に，事象3が生起する場合を取り上げる．事象3は，２つの時点τ_A，τ_Bにおいて，着目しているタイプnの劣化パターンが，

$$\begin{cases} i_n \leq i & l > n \text{の時} \\ i_n < i & l < n \text{の時} \end{cases} \tag{3.28a}$$

$$\begin{cases} j_n \leq j & m > n \text{の時} \\ j_n < j & m < n \text{の時} \end{cases} \tag{3.28b}$$

を満足しなければならない．この時，事象3が生起する条件付確率は，

$$P_3(y,z) = \prod_{n=1,\neq l,\neq m}^{L} \sum_{s=0}^{\tilde{i}_n} \sum_{t=s}^{\tilde{j}_n} p^n_{0s}(y) p^n_{st}(z) \tag{3.29}$$

と表される．ただし，記号$\prod_{n=1,\neq l,\neq m}$は，$l$と$m$以外の$n$に関する積であることを意味する．したがって，条件付確率(3.22)の分子は次式で表される．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Prob}[h(y+z)=(j,m),h(y)=(i,l)]\\&=\left\{\prod_{n=1,\neq l,\neq m}^{L}\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}\sum_{t=s}^{\tilde{j}_n}p_{0s}^{n}(y)p_{st}^{n}(z)\right\}\left\{p_{0i}^{l}(y)\sum_{t=i}^{\tilde{j}_l}p_{it}^{l}(z)\right\}\left\{\sum_{s=0}^{\tilde{i}_m}p_{0s}^{m}(y)p_{sj}^{m}(z)\right\}\end{aligned}\tag{3.30}$$

つぎに，条件付確率(3.22)の分母を求める．時点τ_Aにおいて，劣化状態(i,l)が代表値に選択される確率は

$$\mathrm{Prob}[h(y)=(i,l)]=p_{0i}^{l}(y)\prod_{n=1,\neq l}^{L}\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}p_{0s}^{n}(y)\tag{3.31}$$

と表せる．この時，測定時点$\tau_A = y$において，劣化状態(i,l)が観測された時に，時点$\tau_B = y+z$において，劣化状態(j,m)が観測される競合的推移確率$\pi_{il,jm}(y,z)$は，

$$\begin{aligned}\pi_{il,jm}(y,z)=&\left\{\prod_{n=1,\neq l,\neq m}^{L}\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}\sum_{t=s}^{\tilde{j}_n}p_{0s}^{n}(y)p_{st}^{n}(z)\right\}\\&\left\{\sum_{t=i}^{\tilde{j}_l}p_{it}^{l}(z)\right\}\left\{\sum_{s=0}^{\tilde{i}_m}p_{0s}^{m}(y)p_{sj}^{m}(z)\right\}\left\{\prod_{n=1,\neq l}^{L}\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}p_{0s}^{n}(y)\right\}^{-1}\end{aligned}\tag{3.32}$$

と表される．すなわち，競合的推移確率は，前回の補修時点からの経過時間yにも依存することになる．

c) $j\neq 0,\ l=m$のとき

劣化状態(i,l)，(j,m)が観測され，$l=m$が成立する場合を考える．このような場合が成立するためには，1) 時点$\tau_A = y$において，タイプlのひび割れの劣化状態iであり，時点$\tau_B = y+z$において，1) タイプlのひび割れ過程において，損傷度がiからjに推移すること(事象1')，2) それ以外のタイプのひび割れが，代表に選ばれないこと(事象2')，という2つの排他的な事象が同時に生起しなければならない．

まず，事象1'に着目する．タイプlのひび割れ過程において，時点τ_Aにおいて損傷度iの状態から，時点τ_Bに損傷度jに推移する確率は，多段階指数劣化ハザードモデル(3.13),(3.14),(3.15)を用いて

$$P_{1'}(y,z)=p_{0j}^{l}(y)p_{ij}^{l}(z)\tag{3.33}$$

と表される．つぎに，事象2'が生起する場合を取り上げる．事象2'は，時点τ_Aにおいて，タイプl以外の劣化パターンが，条件(3.23),(3.26)を同時に満足する場合に成立する．この時，事象2'が生起する条件付確率は，

$$P_{2'}(y,z)=\prod_{n=1,\neq l}^{L}\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}\sum_{t=s}^{\tilde{j}_n}p_{0s}^{n}(y)p_{st}^{n}(z)\tag{3.34}$$

と表される．一方，時点$\tau_A = y$において，$h(y) = (i,l)$が代表値に選ばれる確率$\mathrm{Prob}[h(y) = (i,l)]$は

$$\mathrm{Prob}[h(y) = (i,l)] = p^l_{0j}(y) \prod_{n=1,\neq l}^{L} \sum_{s=0}^{\tilde{i}_n} p_{0s}(y) \tag{3.35}$$

と表せる．この時，測定時点τ_Aにおいて，劣化状態(i,l)が観測された時に，時点τ_Bにおいて，劣化状態(j,l)が観測される競合的推移確率$\pi_{il,jl}(y,z)$は，

$$\pi_{il,jl}(y,z) = \left\{ \prod_{n=1,\neq l}^{L} \sum_{s=0}^{\tilde{i}_n} \sum_{t=s}^{\tilde{j}_n} p^n_{0s}(y) p^n_{st}(z) \right\} p^l_{ij}(z) \left\{ \prod_{n=1,\neq l}^{L} \sum_{s=0}^{\tilde{i}_n} p^n_{0s}(y) \right\}^{-1} \tag{3.36}$$

と表される．以上の議論より明らかなように，競合的推移確率$\pi_{il,jm}(y,z)$ $(i = 1,\cdots,I-1; j = i,\cdots,I; l,m = 1,\cdots,L)$は，タイプ別マルコフ推移確率$p^l_{ij}(z)$を用いて表現できる．すなわち，競合的推移確率$\pi_{il,jm}(z)$は，タイプ別マルコフ推移確率$p^l_{ij}(z)$に関する高次多項式になっている．このため，競合的劣化ハザードモデルを推計する際に，単純な最尤法[?),38)]を用いることができないという問題が発生する．

3.3.4　非マルコフ性と状態分布予測

以上で議論したように，タイプ別ひび割れ過程はマルコフ連鎖で表現されるが，タイプ別ひび割れ過程の競争関係を記述する競合的推移確率はマルコフ性を満足しない．このことを示すために，サンプル時間軸上で間隔zで並ぶ3つの時点τ_A, τ_B, τ_Cに着目する．時点間の時間間隔をzとし，初期時点からのt_A, t_B, t_Cまでの経過時間を，それぞれy_A, y_B, y_Cと表す．競合的劣化過程がマルコフ性を満足する場合，

$$\begin{aligned} &\mathrm{Prob}[h(y_C) = (j,m) | h(y_A) = (i,l)] \\ &= \mathrm{Prob}[h(y_C) = (j,m) | h(y_B) = (k,n)] \cdot \mathrm{Prob}[h(y_B) = (k,n) | h(y_A) = (i,l)] \end{aligned} \tag{3.37}$$

を満足する．一方，競合的推移確率(3.32),(3.36)の定義より明らかなように，時間間隔zだけでなく初期時点からの経過時間yにも依存するため，

$$\pi^{il,jm}(y_A, 2z) = \sum_{k=1}^{I} \sum_{n=1}^{L} \pi^{il,kn}(y_A, z) \pi^{kn,jm}(y_B, z) \tag{3.38}$$

が成立する保証はない．すなわち，競合的劣化過程はマルコフ性を満足しない．このため，舗装の劣化状態の経年的変化を，競合的推移確率行列を用いて追跡することができない．しかし，個別のタイプ別ひび割れ過程に関する推移確率を用いれば，劣化状態の経年変化を求めることができる．

いま，初期時点からy年経過した時点において劣化状態(i,l) $(i=0,\cdots,I;l=0,\cdots,L)$が，代表的劣化状態として観測される確率$\mathcal{P}_{il}(y)$は

$$\mathcal{P}_{il}(y)=\left\{\prod_{n\neq l}\sum_{i_n=0}^{\tilde{i}_l}p_{0i_n}^{n}(y)\right\}p_{0i}^{l}(y) \tag{3.39}$$

と表される．また，補修時点からy年経過した時点で，もっとも劣化が進展したタイプの損傷度がiとなる確率 (以下，最大損傷度確率と呼ぶ) $\mathcal{P}_i(y)$は

$$\mathcal{P}_i^*(y)=\sum_{l=1}^{L}\mathcal{P}_{il}(y) \tag{3.40}$$

となる．また，補修時点から損傷度がjに到達するまでの期待寿命$ET(j)$は

$$ET(j)=\int_0^\infty y\sum_{i=0}^{j-1}\mathcal{P}_i^*(y)dy \tag{3.41}$$

と表される．期待寿命$ET(j)$を用いて，ひび割れ過程全体の供用性曲線を求めることができる．

3.4　推計方法

3.4.1　ＭＣＭＣ法

伝統的なベイズ統計学[40)]では，共役な事前分布，事後分布を用いて，統計モデルのパラメータを推計する方法が採用される[41)]．しかし，ハザードモデルの場合，簡単な指数ハザードモデルを用いても，共役事前確率分布が存在しないことが知られている[42)]．共役事前確率分布が存在しない場合，事後分布における基準化定数を解析的に求めることは不可能であり，数値解析により多重積分を求めることが必要となる．このことが，ベイズ統計学をハザード解析へ適用する際に，大きな障害になっていた．しかし，近年，MCMC法[41)]がベイズ統計学の分野に導入され，多重数値積分により基準化定数を求めなくても，効率的に事後分布を求めることが可能となった．その結果，ベイズ推計法の適用範囲は大幅に拡大したと考えることができる．すでに，MCMC法を用いたベイズ推計法に関して，いくつかの研究が蓄積されている[41),43)]．代表的なMCMC法として，ギブスサンプリング (Gibbs sampling) 法，メトロポリス・ヘイスティングス (Metropolis-Hastings : MHと略す) 法等が提案されている[41)]．すでに，貝戸等はMCMC法を用いて，マルコフ推移確率を効率的にベイズ推計する方法を提案している[44)]．しかし，競合的劣化ハザードモデルの推計では，後述するように，尤度関数が特殊な形をしているため，通常の最尤法やベイズ推計法[45)−46)]を用いることが困難である．このようなことから，本章では通常の尤度関数ではなく，尤度関数の完備化[47)−50)]を行うことにより，MCMC法を用いて競合的劣化ハザードモデルを推計する方法を提案する．

3.4.2 指数劣化ハザードモデルの特定化

道路舗装のひび割れ状況に関するK個の定期測定データが得られたと考える．測定サンプルk $(k=1,\cdots,K)$には，2個の連続する定期測定が実施されたサンプル時間軸上の時点（前回から補修時点からの経過）$\tau_A^k=y^k$と$\tau_B^k=y^k+z^k$，及び2つの測定時点において観測された道路舗装の劣化状態$h(y^k),h(y^k+z^k)$に関する情報が記述されている．ただし，z^kは2つの測定時点間の時間間隔である．さらに，2つの測定時点における劣化状態の推移パターンに基づいて，ダミー変数$\delta_{il,jm}^k$ $(i,j=0,\cdots,I;l,m=0,\cdots,L;k=1,\cdots,K)$を

$$\delta_{il,jm}^k=\begin{cases}1 & h(y^k)=(i,l)\\ & h(y^k+z^k)=(j,m)\text{の時}\\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases} \tag{3.42}$$

と定義する．つぎに，道路のひび割れ劣化速度に影響を及ぼす道路の構造特性や環境特性を表す特性ベクトルを$\boldsymbol{x}^k=(x_1^k,\cdots,x_M^k)$と表す．ただし，$x_m^k$ $(m=1,\cdots,M)$は道路区間サンプルkのm番目の特性変数の測定値を表す．定期測定スキームの下で得られる測定サンプルkが有する情報は$\boldsymbol{\xi}^k=(\boldsymbol{\delta}^k,y^k,z^k,\boldsymbol{x}^k)$として整理できる．ただし，$\boldsymbol{\delta}^k=\{\delta_{il,jm}^k:i,=0,\cdots,I-1;l,m=0,\cdots,L\}$はダミー変数ベクトルである．

3.3.3で議論したように，競合的劣化ハザードモデルは，多段階指数劣化ハザードモデルを用いて表現されるタイプ別マルコフ推移確率を用いて表現できる．さらに，**3.3.2**で述べたように，多段階指数劣化ハザードモデルを用いれば，タイプ別マルコフ推移確率を求めることができる．道路区間サンプルk $(k=1,\cdots,K)$に対して，ひび割れタイプl $(l=1,\cdots,L)$の損傷度別ハザード率θ_{il}^k $(i=0,\cdots,I-1;l=0,\cdots,L;k=1,\cdots,K)$を舗装特性$\boldsymbol{x}^k=(x_1^k,\cdots,x_M^k)$を用いて，

$$\theta_{il}^k=\exp(\boldsymbol{x}^k\boldsymbol{\beta}_{il}') \tag{3.43}$$

と表そう．ただし，$\boldsymbol{\beta}_{il}=(\beta_{il}^1,\cdots,\beta_{il}^M)$は未知パラメータ$\beta_{il}^m$ $(m=1,\cdots,M)$の行ベクトルである．記号$'$は転置操作を表す．ひび割タイプlのマルコフ推移確率p_{ij}^lは，測定間隔z^kと道路区間特性$\boldsymbol{x}^k$の関数として表現できる．このことを明示的に表現するために，タイプ別マルコフ推移確率を$p_{ij}^l(z^k,\boldsymbol{x}^k:\boldsymbol{\beta}_{il})$と表現する．さらに，競合的推移確率$\pi_{il,jm}$は，タイプ別マルコフ推移確率$p_{ij}^l(y^k,\boldsymbol{x}^k:\boldsymbol{\beta}_{il}),p_{ij}^n(z^k,\boldsymbol{x}^k:\boldsymbol{\beta}_{il})$ $(n\neq l)$を用いて表現できる．そこで，競合的推移確率を$\pi_{il,jm}(y^k,z^k,\boldsymbol{x}^k:\boldsymbol{\beta})$と表現する．ただし，$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_{01},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{il},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{I-1L})$である．

3.4.3 完備化尤度関数の定式化

競合的劣化ハザードモデルでは，測定時点において「もっとも損傷が進展したタイプ」の損傷度のみが記録される．言い換えれば，測定結果に記載されないタイプのひび割れの

損傷度 (以下，観測されない損傷度と呼ぶ) に関する情報が入手可能でない．競合的劣化ハザードモデルでは，観測されたひび割れタイプだけでなく，観測されないタイプのひび割れに関する推移確率も用いて，推移確率$\pi_{il,jm}$が表現される．

K個の道路区間で観測された測定データ$\bar{\boldsymbol{\xi}} = (\bar{\boldsymbol{\xi}}^1, \cdots, \bar{\boldsymbol{\xi}}^K)$ が観測される同時生起確率 (尤度) $\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta} : \bar{\boldsymbol{\xi}})$ は，競合的劣化ハザードモデル$\pi_{il,jm}(\bar{y}^k, \bar{z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k : \boldsymbol{\beta})$ を用いて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\boldsymbol{\beta} : \bar{\boldsymbol{\xi}}) =& \prod_{i=0}^{I-1}\prod_{l=0}^{L}\prod_{j=i}^{I}\prod_{m=0}^{L}\prod_{k=1}^{K}\left\{\pi_{il,jm}(\bar{y}^k, \bar{z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k : \boldsymbol{\beta})\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}} \\
=& \prod_{i=0}^{I-1}\prod_{l=0}^{L}\prod_{j=i}^{I}\prod_{k=1}^{K}\left[\prod_{m=0}^{L}\left\{\prod_{n=1,\neq l}^{L}\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n} p^n_{0s}(\bar{y}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}}\right]^{-1} \\
& \left[\prod_{m=0,\neq l}^{L}\left\{\prod_{n=1,\neq l,\neq m}^{L}\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}\sum_{t=s}^{\tilde{j}_n} p^n_{0s}(\bar{y}^k)p^n_{st}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}}\right. \\
& \left.\left\{\sum_{t=i}^{\tilde{j}_l} p^l_{it}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}}\left\{\sum_{s=0}^{\tilde{i}_m} p^m_{0s}(\bar{y}^k)p^m_{sj}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}}\right] \\
& \left\{\prod_{n=1,\neq l}^{L}\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}\sum_{t=s}^{\tilde{j}_n} p^n_{0s}(\bar{y}^k)p^n_{st}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jl}}\left\{p^l_{ij}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jl}}
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

で表される．ただし，$p^l_{ij}(\bar{z}^k) = p^l_{ij}(\bar{z}^k, \bar{\boldsymbol{x}}^k : \boldsymbol{\beta}_{il})$ である．この時，パラメータ推定問題は，尤度関数 (3.44) を最大化するようなパラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}$を求める問題に帰着される．このように，尤度関数 (3.44) はマルコフ生起確率$p^l_{ij}(\bar{z}^k)$ に関する高度の多項式となり，最尤法を用いて推定量を求めようとすれば極めて多くの零点解を持つ非線形連立方程式を解かなければならない．このため，通常の最尤法を用いて，多段階指数劣化ハザードモデルのパラメータを推計することは極めて困難となる．そこで，本章では，測定時点τ^k_Aにおいて，タイプnの観測されない損傷度の実現値を，潜在変数s^k_nを用いて表現する．すなわち，測定時点τ^k_Aにおいて，道路区間kのタイプ別ひび割れの損傷度は$\boldsymbol{s}^k = (s^k_1, \cdots, i, \cdots, s^k_L)$ と表すことができる．ただし，iは，道路区間kで観測されたひび割れ損傷度を表す．潜在変数の値域は

$$
\begin{cases}
0 \leq s^k_n \leq i & n < l\text{の時} \\
0 \leq s^k_n < i & n > l\text{の時}
\end{cases}
\tag{3.45}
$$

と定義される．観測されないタイプの損傷度に関する情報は入手不可能であり，潜在変数ベクトル$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s}^1, \cdots, \boldsymbol{s}^K)$ は観測不可能である．ここでは，かりに潜在変数が測定できた

と考え，議論を進める．潜在変数$\boldsymbol{s}$が観測可能な場合，尤度関数 (3.44) は

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\beta}:\bar{\boldsymbol{\xi}}) = & \prod_{i=0}^{I-1}\prod_{l=0}^{L}\prod_{j=i}^{I}\prod_{k=1}^{K} \left[\prod_{m=0}^{L}\left\{\prod_{n=1,\neq l}^{L} p^{n}_{0s^k_n}(\bar{y}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}}\right]^{-1} \\
& \prod_{m=0,\neq l}^{L}\left[\prod_{n=1,\neq l,\neq m}^{L}\left\{\sum_{t=s^k_n}^{\tilde{j}_n} p^{n}_{s^k_n t}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}}\right. \\
& \left.\left\{\sum_{t=i}^{\tilde{j}_l} p^{l}_{it}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}} \left\{p^{n}_{s^k_n j}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jm}}\right] \\
& \left\{\prod_{n=1,\neq l}^{L}\sum_{s^k_n=0}^{\tilde{j}_n}\sum_{t=s^k_n}^{\tilde{j}_n} p^{n}_{s^k_n t}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jl}} \left\{p^{l}_{ij}(\bar{z}^k)\right\}^{\bar{\delta}^k_{il,jl}}
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

と表現できる．以上の操作を完備化 (completion) と言う．完備化された尤度関数 (以下，完備化尤度関数と呼ぶ) (3.46) は，通常の尤度関数 (3.44) より大幅に簡略化されていることが理解できる．ただし，完備化尤度関数 (3.46) の中に含まれる潜在変数$\boldsymbol{s}$は，本来測定されない変数である．そこで，完備尤度関数 (3.46) を用いて，潜在変数の確率分布を推計することを考える．完備尤度関数を展開することにより，潜在変数$\boldsymbol{s}$に関する全条件付事後分布 (full conditional posterior distribution) を導出することができる．ここで，$\boldsymbol{s}^k_{-n}=(\boldsymbol{s}^1,\cdots,s^k_1,\cdots,s^k_{n-1},s^k_{n+1},\cdots,s^k_L,\cdots,\boldsymbol{s}^K)$ とすれば，ベイズ法則より $s^k_n=s$ の全条件付事後確率は，次式で表せる．

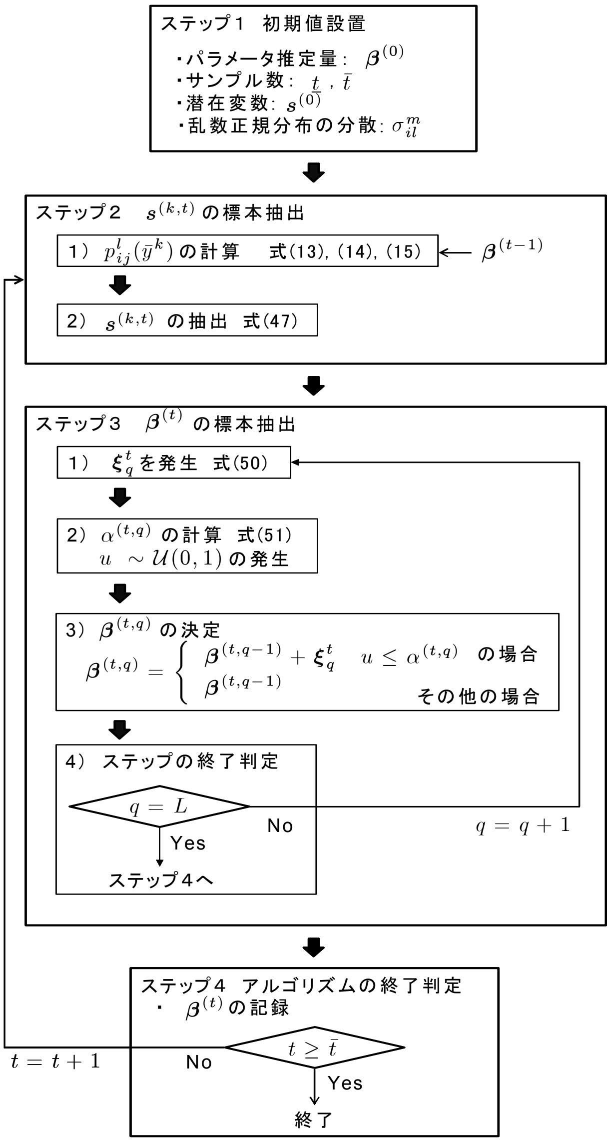
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Prob}\{s^k_n=s|\boldsymbol{s}^k_{-n},\bar{\boldsymbol{\xi}}:\boldsymbol{\beta}\} &= \frac{\tilde{\mathcal{L}}(s^k_n=s,\boldsymbol{s}^k_{-n},\boldsymbol{\beta}:\bar{\boldsymbol{\xi}})}{\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}\tilde{\mathcal{L}}(s^k_n=s,\boldsymbol{s}^k_{-n},\boldsymbol{\beta}:\bar{\boldsymbol{\xi}})} \\
&= \frac{p^n_{0s}(\bar{y}^k,\bar{\boldsymbol{x}}^k:\boldsymbol{\beta}_{0s})}{\sum_{s=0}^{\tilde{i}_n}p^n_{0s}(\bar{y}^k,\bar{\boldsymbol{x}}^k:\boldsymbol{\beta}_{0s})}
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

3.4.4 MH 法

本章では代表的な MCMC 法である MH 法[41]を用いて，パラメータ$\boldsymbol{\beta}$の標本サンプルを事後確率密度関数から抽出する．MH 法では事後分布からのサンプリングが難しい場合に，これを近似するような分布 (提案分布と呼ぶ) からサンプリングを行う．さらに，目標分布と近似分布の差異を修正するステップを含めることにより，目標分布からランダムサンプリングを行う方法である[41]．本章ではパラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}$を酔歩過程 MH 法を用いてサンプリングする．酔歩過程 MH 法は推計されるパラメータをある確率密度に従って酔歩させながらサンプリングする方法で，その確率密度が提案密度となる．本章では各パラメータが独自に平均 0 の正規分布に従って酔歩過程を行うと仮定する．すなわち，

$$
\beta^{m(t)}_{il}-\beta^{m(t-1)}_{il}\sim\mathcal{N}(0,(\sigma^m_{il})^2) \tag{3.48}
$$

である．ただし，t は標本サンプリング回数である．ここで，正規分布の分散 $(\sigma^m_{il})^2$は，任意に設定することができるパラメータであるが，効率的なサンプリングが行われるような



注) 図中の式番号は本文中のものと対応している．

図 3-3　酔歩過程 MH 法の推計手順

ものを選択するのが望ましい．以下では，酔歩過程 MH 法を用いたパラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}$のサンプリング手順を取りまとめる．なお，酔歩過程 MH 法を用いた計算手順を**図 3-3** に一括して整理している．

a) ステップ1　初期値設定

提案分布 (3.48) の分散パラメータσ_{il}^{m}の値を任意に設定する．潜在変数の初期値$\boldsymbol{s}^{(0)} = (\boldsymbol{s}^{(1,0)}, \cdots, \boldsymbol{s}^{(K,0)})$ を設定する．ただし，$\boldsymbol{s}^{(k,0)} = (s_{1}^{(k,0)}, \cdots, s_{L}^{(k,0)})$ であり，潜在変数は制約条件 (3.45) を満足しなければならない．パラメータ推定量の初期値$\boldsymbol{\beta}^{(0)}$を任意に設定する．これらの初期値の影響は，MCMC 法によるシミュレーション回数が蓄積されるにつれ，次第に薄れていく．サンプリング回数tを$t = 1$とする．

b）ステップ2　潜在変数$s^{(k,t)}$の標本抽出

潜在変数$\boldsymbol{s}^{(k,t-1)}$およびパラメータ推定量$\boldsymbol{\beta}^{(t-1)}$を与件として，新しい潜在変数$\boldsymbol{s}^{(k,t)}$を標本抽出する．そのために，パラメータ推定量$\boldsymbol{\beta}^{(t-1)}$を与件として，ひび割れタイプ別マルコフ推移$p_{ij}^{l}(\bar{y}^{k})$を定義する．そのうえで，式(3.47)を用いて，潜在変数$\boldsymbol{s}^{(k,t)}$を標本抽出する．

c）ステップ3　パラメータ$\beta^{(t)}$の標本抽出

各劣化タイプに対して定義される多段階指数劣化ハザードモデルのパラメータ標本を酔歩過程MH法より抽出する．ここで，パラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}^{(t-1)} = (\boldsymbol{\beta}_{00}^{1,(t-1)}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{I-1L}^{M,(t-1)})$の各要素の添え字を再定義し，$\boldsymbol{\beta}^{(t-1)} = (\beta_1^{(t-1)}, \cdots, \beta_J^{(t-1)})$と書き換える．この時，酔歩過程MH法によるパラメータの標本抽出法は以下のように整理できる．

ステップ3-1　更新された潜在変数ベクトル$\boldsymbol{s}^{(k,t)}$，パラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}^{(t-1)}$を与件とする．

ステップ3-2　サンプリング回数t，サブステップqのパラメータベクトル

$$\boldsymbol{\beta}^{(t,q)} = (\beta_1^{t,q}, \cdots, \beta_q^{t,q}, \beta_{q+1}^{t,q-1}, \cdots, \beta_J^{t,q-1})' \tag{3.49}$$

を定義する．また，サブステップqでの酔歩過程におけるステップ幅ベクトル$\boldsymbol{\xi}_q^t = (0, \cdots, 0, \xi_q^t, 0, \cdots, 0)'$ (第i要素のみが値ξ_q^kをとる列ベクトル) を定義する．酔歩過程の各ステップ幅は平均が0の正規分布に従うと仮定しているので，

$$\xi_q^t \sim \mathcal{N}(0, (\sigma_q)^2) \tag{3.50}$$

が成立する．これらを与件として，以下を計算する．

$$\alpha^{(t,q)} = \min\left[\frac{\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{s}^{(t)}, \boldsymbol{\beta}^{(t,q)}, \bar{\boldsymbol{\xi}})}{\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{s}^{(t)}, \boldsymbol{\beta}^{(t,q-1)}, \bar{\boldsymbol{\xi}})}, 1\right] \tag{3.51}$$

ただし，$\tilde{\mathcal{L}}$は完備化尤度関数である．

ステップ3-3　区間$[0,1]$で定義される一様分布$\mathcal{U}(0,1)$から，一様乱数$u \sim \mathcal{U}(0,1)$を発生させ，$\boldsymbol{\beta}^{(t,q)}$を以下のルールに従い決定する．

$$\boldsymbol{\beta}^{(t,q)} = \begin{cases} \boldsymbol{\beta}^{(t,q)} + \boldsymbol{\xi}_q^t & u \leq \alpha^{(t,q)} \text{の場合} \\ \boldsymbol{\beta}^{(t,q)} & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{3.52}$$

以上の手続きを$q=1$から$q=L$まで実施する．

d）ステップ4　パラメータの更新

以上で求めたパラメータ推定量の更新値$\boldsymbol{\beta}^{(t)}$を記録する．$t \leq \bar{t}$の場合，$t = t+1$として，**ステップ2**へ戻る．そうでない場合，アルゴリズムを終了する．

なお，以上のアルゴリズムの初期段階においては，パラメータの初期値設定の影響が残存している．このため，シミュレーション回数tが十分大きな$\underline{t}$に到達するまでのパラメータ標本を除去することが望ましい．このため，MH法で求めた$\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ $(t = \underline{t}+1, \underline{t}+2, \cdots, \bar{t})$をパラメータ標本と考える．以下では，これらの標本を用いて，パラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}$の事後分布に関する各種の統計量を定義する．

3.4.5　事後分布に関する統計量

MCMC法により得られた標本を用いて，パラメータベクトル$\boldsymbol{\beta}$に関する統計的性質を分析できる．MCMC法を用いた場合，パラメータの事後確率密度関数$\pi(\boldsymbol{\beta}|\bar{\boldsymbol{\xi}})$を解析的な関数として表現することはできない．得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推定することとなる[41]．いま，MCMC法で得られた標本を$\boldsymbol{\beta}^{(t)}$ $(t = 1, \cdots, \bar{t})$と表そう．この内，最初の$\underline{t}$個の標本は収束過程からの標本と考え，標本集合から除去する．その上で，パラメータの標本添字集合を$\mathcal{M} = \{\underline{t}+1, \cdots, \bar{t}\}$と定義する．このとき，パラメータ$\boldsymbol{\beta}$の同時確率分布関数$G(\boldsymbol{\beta})$は

$$G(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\#\{\boldsymbol{\beta}^{(t)} \leq \boldsymbol{\beta}, t \in \mathcal{M}\}}{\bar{t} - \underline{t}} \tag{3.53}$$

と表すことができる．ただし，$\#\{\boldsymbol{\beta}^{(t)} \leq \boldsymbol{\beta}, t \in \mathcal{M}\}$は論理式$\boldsymbol{\beta}^{(t)} \leq \boldsymbol{\beta}, t \in \mathcal{M}$が成立するサンプルの総数である．また，パラメータ$\boldsymbol{\beta}$の事後分布の期待値ベクトル$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\beta})$，分散・共分散行列$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\beta})$は，それぞれ

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\beta}) &= (\tilde{\zeta}(\beta_1), \cdots, \tilde{\zeta}(\beta_J))' \\ &= \Big(\sum_{t=\underline{t}+1}^{\bar{t}} \frac{\beta_1^{(t)}}{\bar{t}-\underline{t}}, \cdots, \sum_{t=\underline{t}+1}^{\bar{t}} \frac{\beta_J^{(t)}}{\bar{t}-\underline{t}}\Big)'\end{aligned} \tag{3.54a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2(\beta_1) & \cdots & \tilde{\sigma}(\beta_1\beta_J) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\beta_J\beta_1) & \cdots & \tilde{\sigma}^2(\beta_J) \end{pmatrix} \tag{3.54b}$$

と表される．ただし，

$$\tilde{\sigma}^2(\beta_i) = \sum_{t=\underline{t}+1}^{\bar{t}} \frac{\{\beta_i^{(t)} - \tilde{\zeta}(\beta_i)\}^2}{\bar{t}-\underline{t}} \tag{3.55a}$$

$$\tilde{\sigma}(\beta_i\beta_j) = \sum_{t=\underline{t}+1}^{\bar{t}} \frac{\{\beta_i^{(t)} - \tilde{\zeta}(\beta_i)\}\{\beta_j^{(t)} - \tilde{\zeta}(\beta_j)\}}{\bar{t}-\underline{t}} \tag{3.55b}$$

である．また，パラメータ標本を用いて，パラメータ$\boldsymbol{\beta}$の信頼区間を定義できる．たとえば，パラメータ$\boldsymbol{\beta}$の$100(1-2\varepsilon)\%$ 信頼区間は，標本順序統計量$\underline{\beta}_j^\varepsilon, \overline{\beta}_j^\varepsilon$ $(j=1,\cdots,J)$

$$\underline{\beta}_j^\varepsilon = \arg\max_{\beta_j^*} \left\{ \frac{\#\{\beta_j^{(t)} \leq \beta_j^*, t \in \mathcal{M}\}}{\bar{t}-\underline{t}} \leq \varepsilon \right\} \tag{3.56a}$$

$$\overline{\beta}_j^\varepsilon = \arg\min_{\beta_j^{**}} \left\{ \frac{\#\{\beta_j^{(t)} \geq \beta_j^{**}, t \in \mathcal{M}\}}{\bar{t}-\underline{t}} \leq \varepsilon \right\} \tag{3.56b}$$

を用いて$\underline{\beta}_j^\varepsilon < \beta_j < \overline{\beta}_j^\varepsilon$と定義できる．

3.5 適用事例

3.5.1 適用事例の概要

本章で提案した競合的劣化ハザードモデルの適用可能性を，東関東自動車道 (区間 : 湾岸市川IC-潮来IC) において過去13年間 (1992年〜2004年) に実施された路面性状測定結果を用いて検討する．対象とするデータベースは，測定データと補修履歴データから構成されている．測定データは**2章**で用いたものと同じであり，測定は2年，3年間隔で行われている．また，補修履歴データは，今回新たにデータベースに加えたデータであり，対象区間における補修履歴を記載している．以下では，**2章**と重複する部分も存在するが，データベースの概略について紹介しておく．対象とする高速道路区間は全区間長が74.5kmであり，合計11個の部分区間により構成される．同区間では，大型車の利用が多く，中交通区間 (1方向あたり1日1,500台以上5,000台未満) に分類される部分区間が多い．中には，超重交通区間 (1方向あたり1日10,000台以上) に指定されている部分区間が4箇所存在している．また，舗装種別はアスファルト舗装であり，車線構成は8区間 (湾岸市川IC〜成田IC) が片側3車線で，3区間 (成田IC〜潮来IC) が片側2車線である．同区間で実施された路面性状測定の結果は，ひび割れの状態を，0から9までの整数値 (レーティング) で評価している．これらのレーティングは，3つのひび割れのタイプ (縦ひび割れ・横ひび割れ・面ひび割れ) と各タイプに対する3つの損傷度 (劣化の進行度) の組み合わせに対応している．本章では，ひび割れの状態を，**表3-2**に示すようなひび割れのタイプと，各タイプに対する損傷度の組み合わせにより表現した．同表には，路面性状測定における評価結果との対応関係も示している．なお，本稿では大規模な面ひび割れ (表中の劣化状態$(3,3)$) のみを競合的劣化過程の吸収状態と考える．

高速道路における路面性状測定では，各路線の100mを1セクションとして，セクション毎にひび割れに対する損傷度評価が行われる．1つのセクションに複数のひび割れが存在する場合には，発見されたひび割れの中で，もっとも劣化が進行したひび割れが選択され，当該セクションの代表的なひび割れとしてデータベースに記載される．このため，任意の時点の路面性状測定時点と，次の測定時点の間に，セクションを代表するひび割れが

表 3-2　ひび割れ劣化状態

劣化状態	物理的な意味
0,0 (0)	新設状態
1,1 (1)	縦ひび割れ (小規模)
2,1 (2)	(中規模)
3,1 (3)	(大規模)
1,2 (4)	横ひび割れ (小規模)
2,2 (5)	(中規模)
3,2 (6)	(大規模)
1,3 (7)	面ひび割れ (小規模)
2,3 (8)	(中規模)
3,3 (9)	(大規模)

注) 劣化状態の括弧内の数字は，路面性状測定時における評価結果を表している．

変化し，データベースには異なるひび割れの情報が記載されることがある．本データベースから，直近の補修履歴が存在し，かつ，過去2回以上路面性状測定が実施された区間を抽出し，連続する3回の損傷度評価に基づいて，劣化状態 (ひび割れのタイプと損傷度) の推移状況に関するサンプルデータを作成した．ただし，測定誤差などの理由により，損傷度が前回よりも回復しているサンプルはデータベースから削除した．その結果，競合マルコフ劣化ハザードモデルの推計のために利用可能なサンプル数Kは合計$4,180$個となった．

3.5.2　劣化パターンの設定

適用事例では，ひび割れの劣化状態を**表 3-2**に示す状態変数を用いて表現する．測定時点τ_Aの劣化状態を(i,l)，測定時点τ_Bの劣化状態を(j,m)と表す．測定間隔をzとする．劣化状態$(3,3)$は吸収状態であり$\pi_{33,33}=1$が成立する．つぎに，測定時点τ_Aにおける損傷度が$i=2$，すなわち劣化状態が$(2,l)$ $(l=1,2,3)$である場合に着目する．この場合，測定時点τ_Aとτ_Bの間における状態推移確率として1) 劣化状態 ($\pi_{2l,2l}$) に留まる場合，2) 損傷度2において他の劣化状態に推移する場合 ($\pi_{2l,2m}$ $(m=l+1,\cdots,3)$)，3) 損傷度2から損傷度3に推移する場合 ($\pi_{2l,3m}$ $(m=1,2,3)$) が考えられる．さらに，測定時点τ_Aにおける損傷度が$i=1$の場合，測定時点τ_Aとτ_Bの間における状態推移確率として1) 劣化状態 ($\pi_{1l,1l}$) に留まる場合，2) 損傷度1において他の劣化状態に推移する場合 ($\pi_{1l,1m}$ $(m=l+1,\cdots,3)$) 3) 損傷度1から損傷度2に推移する場合 ($\pi_{1l,2m}$ $(m=1,2,3)$)，4) 損傷度1から損傷度3に推移する場合 ($\pi_{1l,3m}$ $(m=1,2,3)$) が存在する．最後に，時点τ_Aにおける劣化状態が$(0,0)$の場合，1) 損傷度0に留まる場合 ($\pi_{00,00}$)，2) 損傷度0から損傷度1に推移する場合 ($\pi_{00,1m}$ $(m=1,2,3)$)，3) 損傷度0から損傷度2に推移する場合 ($\pi_{00,2m}$ $(m=1,2,3)$)，4) 損傷度0から損傷度3に推移する場合 ($\pi_{00,3m}$ $(m=1,2,3)$) が存在する．各サンプル

表 3-4　パラメータの推計結果

劣化過程 (i,l)	β_{il}^1	β_{il}^2	β_{il}^3	β_{il}^4
(0,1)	-5.551	0.490	1.112	1.781
	-	(10.108)	(6.957)	(51.222)
(1,1)	-2.488	-	-	0.589
	-	-	-	(4.592)
(2,1)	-1.611	-	-	-
	-	-	-	-
(0,2)	-5.343	0.336	-	3.038
	-	(9.000)	-	(757.729)
(1,2)	-2.390	-	-	1.542
	-	-	-	(56.284)
(2,2)	-3.707	-	-	3.893
	-	-	-	(110.347)
(0,3)	-4.533	-	-	-1.568
	-	-	-	(17.395)
(1,3)	-1.978	-	-	-
	-	-	-	-
(2,3)	-6.434	-	-	-
	-	-	-	-

注) 括弧内は尤度比検定統計量を表している．また，吸収状態についてはハザード率が0となる．同表では，吸収状態のハザード率を記述していない．

データには，直近の補修時点と，連続した2つの測定時点における前の劣化状態 (i,l)，後の劣化状態 (j,m) に関するデータが記載されている．本章では直近の補修時点と，連続する2つの測定時点の劣化状態の間の推移パターンのペアを1つのサンプルとして用いることとした．

3.5.3　推計結果

ひび割れの劣化状態は，**表 3-2** に示したような10個の状態変数を用いて表現することができる．このうち，各ひび割れタイプの終局状態である (3,1)，(3,2)，(3,3) を除いた合計7つの劣化状態に対して，それぞれ劣化ハザードモデルを定義することができる．サンプル k の劣化状態 (i,l) における劣化ハザードモデルは，

$$\theta_{00}^k = \sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{4}\beta_{0n}^m x_m^k \tag{3.57a}$$

$$\theta_{in}^k = \sum_{m=1}^{4}\beta_{in}^m x_m^k \tag{3.57b}$$

$$(i=1,2; n=1,2,3; k=1,\cdots,4180)$$

と表せる．このように劣化ハザードモデルを特定化すれば，7つの劣化状態のそれぞれに対して推移強度が存在する．したがって，合計7個の推移強度モデル (4.11) を推計することが必要となる．推移強度モデルの説明変数として，定数項，車種別交通量，舗装特性，道路構造特性，車線，勾配，気温等の自然条件等を考えることができる．しかし，本データベースでは，東関東自動車道という単一路線を対象としているため，本来ひび割れの進行に影響を及ぼす舗装特性，勾配，自然条件に関する情報は，対象とするセクションごとに同一の値をとる．このため，これらの変数は推移強度モデルの説明変数にとりあげられていない．むしろ，その効果は定数項に集約的に表現されていると考えることができる．さらに，当該区間は区間内に成田空港用のICを有しており，当ICをはさんで交通量が大きく異なる．具体的には，湾岸市川ICから成田IC(以下では成田以西と呼ぶ) までの1車線あたりの平均大型自動車交通量は約3,300台であるのに対して，成田ICから潮来IC(以下では成田以東と呼ぶ) までの区間では約1,000台である．それと同時に，それぞれの区間によって舗装構造も異なる．以上の状況を考慮して，競合的劣化ハザードモデルの推計に用いる説明変数として，道路構造特性と道路区間，大型車交通量 (大型交通量は区間内での最大値を1として基準化している．) をとりあげた．ベイズ推計には推計パラメータの収束判定方法は存在するものの，パラメータの有意性を評価する簡便な指標が存在しないという問題がある．そこで，本章では，説明変数の選定に際して，各説明変数の説明力を尤度比検定統計量を用いて定量的な評価を行った．本来，尤度比検定は最尤推計法において用いられる検定法である．しかし，本章で用いた酔歩過程MH法は，そのアルゴリズムが，最尤法で用いられるパターン法[38]と類似している．そのため，酔歩過程MH法による発生サンプルから求めた尤度の平均値に対して，尤度比検定を行うこととした．当然のことながら，分析対象とする路線が異なれば，採用すべき説明変数も変わりうる．その意味において，今回のケースで採用した説明変数を用いて推計した競合的劣化ハザードモデルは，分析対象としてとりあげた対象区間においてのみ適用可能であることは言うまでもない．

以上の説明変数を用いて，7個の推移強度モデルのパラメータを推計した．さらに，各推移強度モデルごとに，説明変数の組み合わせを変化させ，競合マルコフ劣化ハザードモデル全体の推計精度を比較した．その際，説明変数の説明力を尤度比検定を用いて評価し，説明力の乏しい説明変数を除外した．尤度比 $R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m})$ $(m = 1, \cdots, I)$ は次式で求めることができる．

$$R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m}) = 2\{\ln \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \ln \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m})\} \tag{3.58}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m}$は，パラメータの平均値ベクトル$\hat{\boldsymbol{\beta}}$に対して，第$m$要素$\hat{\beta}_m$を0に置換したベクトルである．$|R(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{-m})| \geq 3.48$ が成立する場合，有意水準5%で帰無仮説$\beta_m = 0$を棄却することができる．さらに，パラメータの推計結果の符号が解釈可能か否かを考慮して，

表 3-5　レーティング期待寿命

劣化状態	$E[\theta_{il}]$	$E[RMD_{il}^k]$(年)
(0,1)	0.032	30.974
(1,1)	0.122	8.172
(2,1)	0.200	5.008
(0,2)	0.046	21.743
(1,2)	0.253	3.958
(2,2)	0.318	3.146
(0,3)	0.004	261.215
(1,3)	0.138	7.227
(2,3)	0.001	622.660

注) 各劣化現象において損傷度3はマルコフ連鎖の吸収状態であり，ハザード率，期待寿命は定義されない．

最終的に説明変数の組み合わせを決定した．以上のプロセスを経て推計した結果を**表 3-4**に示している．表中の括弧の中は尤度比を表す．説明変数$x_1^k = 1$は恒常的に値1をとり，β_{in}^1は定数項を表す．また，x_2^k，x_4^kは

$$x_2^k = \begin{cases} 0 & \text{土工部の場合} \\ 1 & \text{橋梁部の場合} \end{cases}$$

$$x_4^k = \begin{cases} 0 & \text{成田以西の場合} \\ 1 & \text{成田以東の場合} \end{cases}$$

という値をとるダミー変数であり，x_3^kは大型車交通量である．劣化状態$(i,l) = (2,1)$，$(1,3)$，$(2,3)$においては，推移強度モデルは定数項のみで構成される．以上の推計結果より，ひび割れの発生には道路区間 (成田以西，もしくは成田以東) が重要な影響を及ぼすことが理解できる．たとえば，θ_{01}，θ_{11}に対する道路区間のパラメータβ_{01}^4，β_{11}^4が，それぞれ 1.781，0.589 であり，尤度比検定統計量も大きな値を示している．このことより，成田以西では，成田以東に比べて縦ひび割れの進行が早いことが理解できる．同様に，横ひび割れに関しても，成田以西の方が進行が早いことが理解できる．これに対して，面ひび割れに関しては，θ_{03}に対する道路区間のパラメータβ_{01}^4が-1.568であり，成田以西の方が進行が遅いことが理解できる．つぎに，大型自動車交通量の影響についてみてみると，大型自動車交通量は，縦ひび割れが健全な状態から損傷度1の状態に進行する際には，進行を促進する影響を与えるものの，その他の劣化過程には有意な影響を与えない．さらに，縦ひび割れと横ひび割れとが健全な状態から損傷度1の状態に進行する際には，構造特性 (土工部，もしくは橋梁部) が劣化の速度に影響することが読み取れる．

つぎに，推計されたパラメータを用いて式(3.57b) より各劣化状態のハザード率の期待値と期待寿命を算出した．その結果を，**表 3-5** に示している．これより，縦ひび割れと横

表 3-6　ひび割れタイプ別推移確率行列 (平均化操作後)

ひび割れタイプ	縦ひび割れ			
損傷度	0	1	2	3
0	0.968	0.030	0.002	0.000
1	0.0	0.885	0.104	0.011
2	0.0	0.0	0.819	0.181
3	0.0	0.0	0.0	1.0
ひび割れタイプ	横ひび割れ			
0	0.955	0.040	0.005	0.001
1	0.0	0.777	0.190	0.033
2	0.0	0.0	0.728	0.272
3	0.0	0.0	0.0	1.0
ひび割れタイプ	面ひび割れ			
0	0.996	0.004	0.000	0.000
1	0.0	0.871	0.129	0.000
2	0.0	0.0	0.998	0.002
3	0.0	0.0	0.0	1.0

注) 推移行列は，1年間の間に生起する状態推移確率を示している．ここでは，平均操作を行い，当該路線の平均的なひび割れ発生，推移確率を求めたものである．

ひび割れに関しては，損傷度が大きくなるにつれて，ひび割れの進行速度が加速されることが理解できる．さらに，横ひび割れの方が，発生までの期間長やひび割れが発生してからの期待寿命が短いという結果になっている．また，面ひび割れに関しては，ひび割れが健全な状態から損傷度1に進行するまでの期待寿命と，損傷度2から3に進行するまでのそれが，それぞれ261年，622年と，非常に長くなっている．これは，面ひび割れが代表値となっているサンプルが極めて少ないことに起因する．分析対象とした道路区間においては，面ひび割れが発生する以前の段階で，道路舗装の補修が実施されており，面ひび割れがほとんど観察されていないと解釈する方が妥当である．

3.5.4　分析結果

競合的劣化ハザードモデルを用いて，競合的推移確率行列を求めよう．本章で提案したハザードモデルは，説明変数の組み合わせごとにハザード率を定義できる．言い換えれば，道路特性別の競合的推移確率を推計することができる．さらに，競合的劣化ハザードモデルでは非斉次の推移確率を用いているため，直近の補修時点からの経過年数に応じて，より詳細な推移確率の推計が可能である．まず，すべての道路区間に対して平均化操作を施した平均的なハザード率を用いて，ひび割れタイプ別の劣化状態の推移確率を求めた．その結果を**表 3-6** に示している．ひび割れタイプ別の劣化過程は，多段階指数劣化ハザード

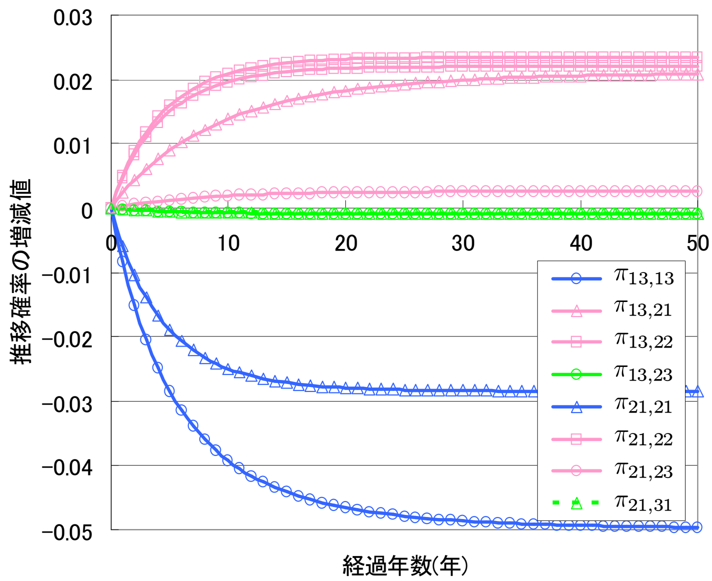
表 3-7　競合的推移確率行列の推計結果 (平均化操作後)

劣化状態	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(0,0)	0.921	0.028	0.039	0.004	0.002	0.005	0.000	0.000	0.001	0.000
(1,1)	0.0	0.842	0.035	0.003	0.104	0.005	0.000	0.011	0.000	0.000
(1,2)	0.0	0.0	0.772	0.003	0.001	0.190	0.000	0.000	0.033	0.000
(1,3)	0.0	0.0	0.0	0.865	0.002	0.004	0.129	0.000	0.001	0.000
(2,1)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.814	0.004	0.000	0.181	0.001	0.000
(2,2)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.727	0.000	0.000	0.272	0.000
(2,3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.998	0.000	0.001	0.002
(3,1)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.999	0.001	0.000
(3,2)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.000	0.000
(3,3)	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

注) 補修直後の1年間の間に生起する競合的推移確率を示している．ここでは，平均操作を行い，当該路線の平均的なひび割れ発生，推移確率を求めている．

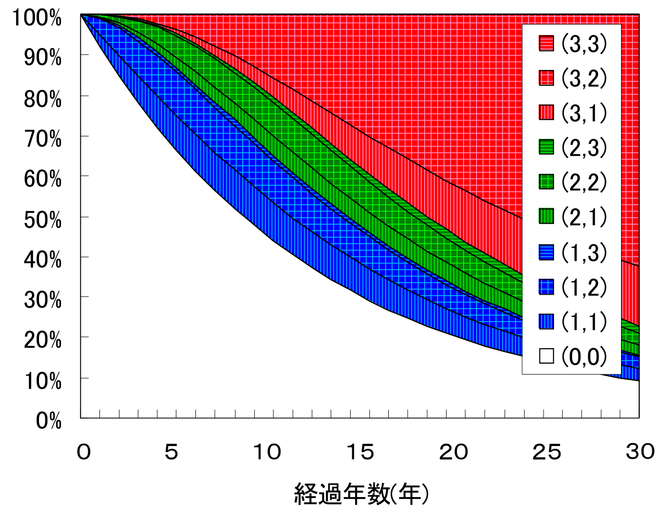
モデルで表現されており，同表に示す推移確率はマルコフ性を満足している．さらに，以上で定義した平均的ハザード率と式(3.21),(3.32),(3.36)を用いて求めた競合的推移確率行列を**表 3-7**に示している．競合的推移確率はマルコフ性を満足しておらず，直近の補修時刻からの経過時間により推移確率行列が変化する．**表 3-7**に例示した競合的推移確率は，補修時刻から最初の1年間において生起する競合的推移確率を表している．補修直後の1年間を対象としているため，比較的軽微な損傷度間の推移確率が大きい値を示している．さらに，**図 3-4**は，競合的推移確率の経年変化を示したものである．同図は，横軸に示す期間が経過した時点における1年間隔の推移確率と初年度からの1年間における推移確率の差が，経過時間によってどのように変化するかを示している．したがって，同図において，同一のひび割れタイプ間の推移確率の変化量がほぼゼ0に近い値を示していることは，経過年数によらず推移確率がほぼ一定の値を示していることを意味する（黄緑色）．しかし，同一の劣化状態に留まる推移確率の変化量は，経過年数に伴って次第に減少し，定常状態に収束している（青色）．一方，ひび割れタイプ間の推移確率の変化量は，時間とともに増加し，定常状態に収束する（桃色）．以上のことより，測定によって観測される劣化状態には，**3.2.4** で言及したように，時間とともに劣化速度の速いタイプのひび割れが代表値として選択される確率が増加する．しかし，このような動的サンプル選択バイアスは，経過時間とともに，ある一定値に収束していくことが理解できる．

つぎに，競合的推移確率行列を用いて，劣化状態分布の経年による推移状態を求めることとする．競合的推移確率行列はマルコフ性を満足しないため，劣化状態分布を求めるためには，初期時点を起点とするサンプル時間軸上で，初期時点の劣化状態$(0,0)$から，時点yにおける劣化状態(i,l)に推移する確率$\mathcal{P}_{il}(y)$を直接求めることが必要となる．式(3.39)を用いて，経過年数yに対して，各劣化状態が生起する確率$\mathcal{P}_{il}(y)$を求めた結果を**図 3-5**



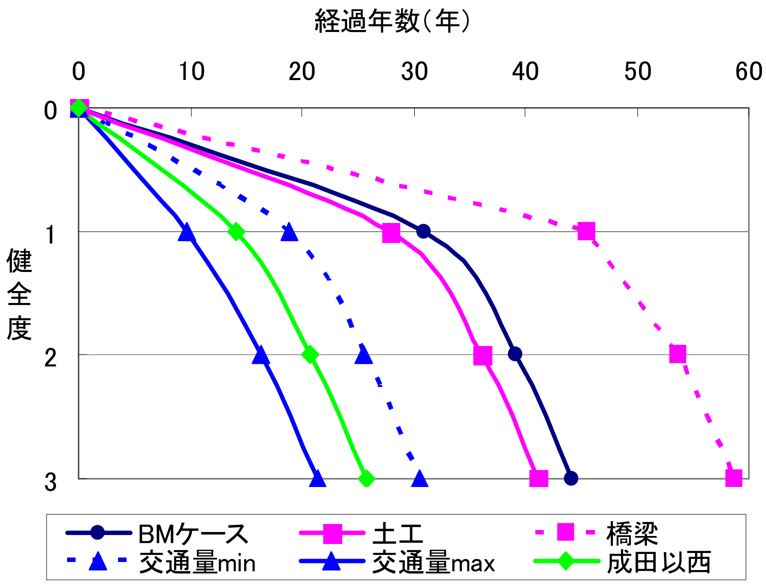
注) 縦軸は各競合的推移確率の初年度からの変化量を表している．初年度の競合的推移確率は**表 3-7** に示すとおりである．また，横軸は初期時点からの経過年数を表している．

図 3-4　各推移確率の経年変化



注) 括弧内の数字は劣化状態 (i, l) を表している．劣化状態 $(3, 3)$ は吸収状態である．

図 3-5　劣化状態分布の経年変化

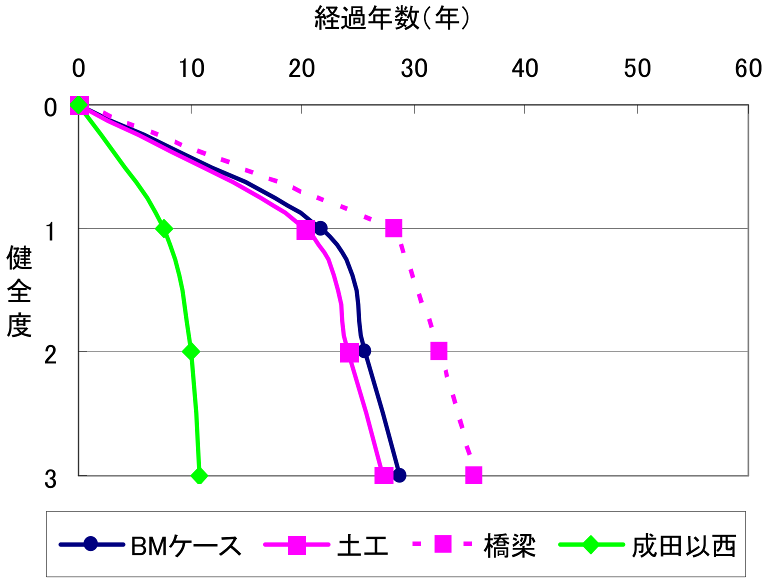


注) BMケースは対象区間における平均的なセクションの供用性曲線を示している．また，交通量は大型交通量を示しており，区間内での最大値を1として基準化したものである．なお，交通量に関する感度分析は，成田以西の区間を対象に行っている．

図 3-6　縦ひび割れの供用性曲線 (競合)

に示している．同図において，縦縞は損傷度1，格子は損傷度2，横縞は損傷度3の状態を表している．また，ひび割れタイプは下から順に縦ひび割れ，横ひび割れ，面ひび割れとしている．同図より，以下のような経験的事項を読み取ることができる．まず，劣化の速度に着目すると，健全なセクションの割合が50%になるのにかかる期間は約9年であり，30%になる期間は約16年である．つぎに，各ひび割れタイプの割合に着目すると，損傷度1においては縦ひび割れと横ひび割れの割合はほぼ1対1であり，その他の損傷度においては横ひび割れの占める割合の方が大きくなっている．特に，損傷度3の横ひび割れは，10年が経過した辺りから急速に増加し，それ以上の劣化状態 (損傷度3の面ひび割れ) に推移していない．このことは，損傷度3の面ひび割れが発生する前の段階で，舗装の補修が実施されるため，損傷度3の横ひび割れが劣化過程の吸収状態の役割を果たしていることを示している．また，全損傷度を通じて，セクションを代表するひび割れタイプとして面ひび割れがほとんど観測されていない．これは，面ひび割れが生起する頻度自身が少ないこと，他のひび割れタイプの劣化の進行が速いこと，および面ひび割れが発生する前の段階で舗装の補修が実施されることの3点に起因している．ここで，**図 3-5** は最も劣化した劣化状態 (代表値) の経年変化を示したものであり，同図において代表値に選ばれる割合が小さい場合でも，実際にはその劣化状態が多数生起している可能性がある点に留意しなければならない．

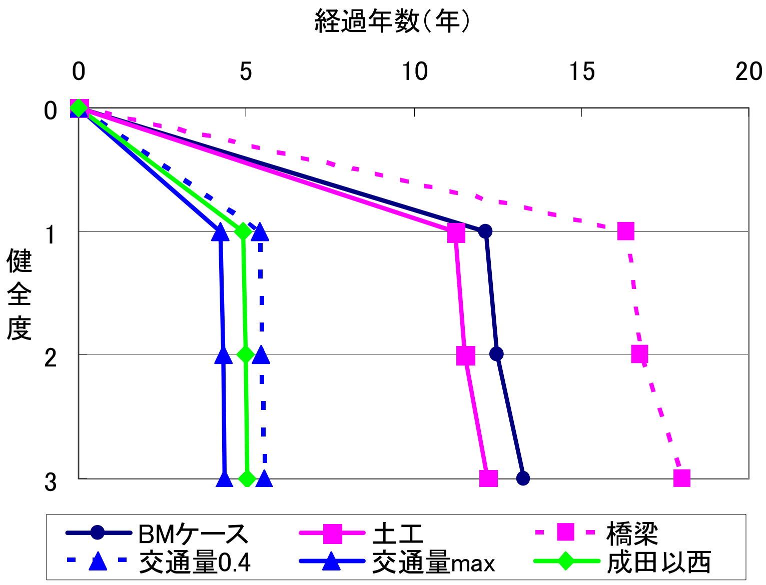
つぎに，式 (4.13) を用いて，縦ひび割れと横ひび割れの供用性曲線を求めた．その結果



注) BMケースは対象区間における平均的なセクションの供用性曲線を示している．また，交通量は大型交通量を示しており，区間内での最大値を1として基準化したものである．なお，横ひび割れに関しては，交通量に関する感度分析は行っていない．

図 3-7　横ひび割れの供用性曲線(競合)

を**図 3-6** と**図 3-7** に示す．同図には，対象区間全体の平均ハザード率を用いた供用性曲線(BMケースと呼ぶ)，および土工部，橋梁部，成田以西の区間の平均ハザード率を用いて求めた供用性曲線を併せて示している．さらに，**図 3-6** には，交通量がひび割れ進行に及ぼす影響を分析するために，成田以西の区間の中で観測された最大交通量と最小交通量を用いてハザード率を算出し，それぞれのハザード率に対応する供用性曲線を求めた結果も示している．これらの図より，以下の点が読み取れる．第1に，縦・横ひび割れは，いずれも初期ひび割れが発生するまでには時間を要するものの，一旦ひび割れが発生するとひび割れは加速度的に進行する．第2に，横ひび割れの方が縦ひび割れよりも劣化速度が速い．例えば両方のBMケースを比較すると，健全な状態から損傷度1に劣化するまでに約10年，損傷度3に劣化するまでには15年程度の差がある．第3に，両ひび割れタイプに共通して，土工部の方が橋梁部より劣化速度が速い．具体的には，その差はそれぞれ約18年，約8年である．第4に，BMケースの供用性曲線は比較的土工部の供用性曲線に近い形状を示しているが，これは本章の対象区間では土工部が約8割であったことに起因する．第5に，両ひび割れタイプにおいて成田以西の区間はBMケースと比べて大幅に劣化速度が速くなっている．特に，横ひび割れにおいてはこの傾向が顕著であり，劣化が進行するにつれて成田以西とBMケースとの期待寿命の差が大きくなっている．第6に，縦ひび割れにおいては交通量が劣化速度に影響を与えており，交通量最大のセクションと交通量最小のセクションでは，劣化に際して平均で約10年の差がある．



注) 括弧内の数字は劣化状態 (i,l) を表している.

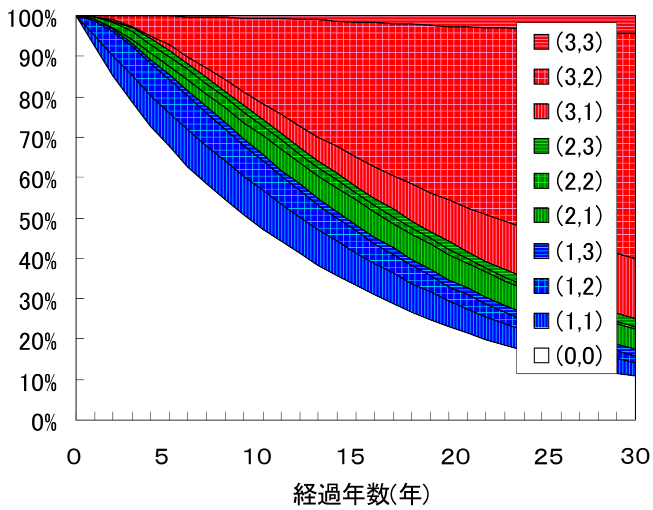
図 3-8　ひび割れ過程全体を考慮した供用性曲線

つぎに，式 (3.41) を用いて，ひび割れ過程全体を対象にした供用性曲線を**図 3-8** に示す．同図では，最も進行しているひび割れタイプを追跡して，その損傷度をある時点でのサンプルを代表する損傷度として示している．このため，**図 3-6**，**図 3-7** に示す供用性曲線よりも，劣化の進行速度が速い供用性曲線が得られる．各道路特性ごとの供用性曲線の形状は，**図 3-6**，**図 3-7** において確認した事項と同じ特性が読み取れる．各ひび割れ過程が競合する結果，ひび割れ全体の進行速度は，各タイプ別のひび割れ進行速度よりも，かなりの程度早いことがわかる．たとえば，劣化速度の速い横ひび割れと比べてみても，ひび割れ過程全体の劣化速度は 2 倍近くになっている．さらに，劣化が始まってからの劣化の進行速度も，**図 3-6**，**図 3-7** と比べて，より加速された結果となっている．

3.5.5　他のハザードモデルとの比較

競合的劣化ハザードモデルの推計結果と，筆者等が提案した階層型指数劣化ハザードモデル[7)]，多段階指数劣化ハザードモデル[23)]を用いた推計結果を比較し，競合的劣化ハザードモデルの特性を明らかにする．階層型指数劣化ハザードモデルの詳細については参考文献に譲る．モデルの推計にあたっては，同一のデータベースを用いた．ただし，多段階指数ハザードモデルの推計にあたっては，各ひび割れタイプの損傷データのみを用いて，モデルを推計している．

図 3-9 に，階層型指数劣化ハザードモデルを用いて求めた劣化状態分布の経年変化を示している．同図と**図 3-5** を比較することにより，損傷度別の状態分布には大きな差異がないが，個別のひび割れに関しては状態分布に差異が見出せる．特に，階層型指数劣化ハザー

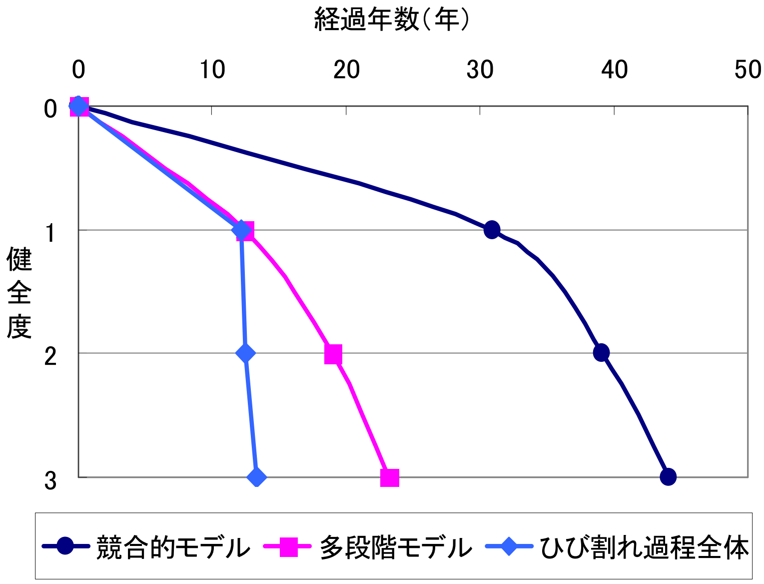


注）括弧内の数字は劣化状態 (i,l) を表している．劣化状態 $(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)$ は吸収状態である．

図 3-9　劣化状態分布の経年変化 (階層型)

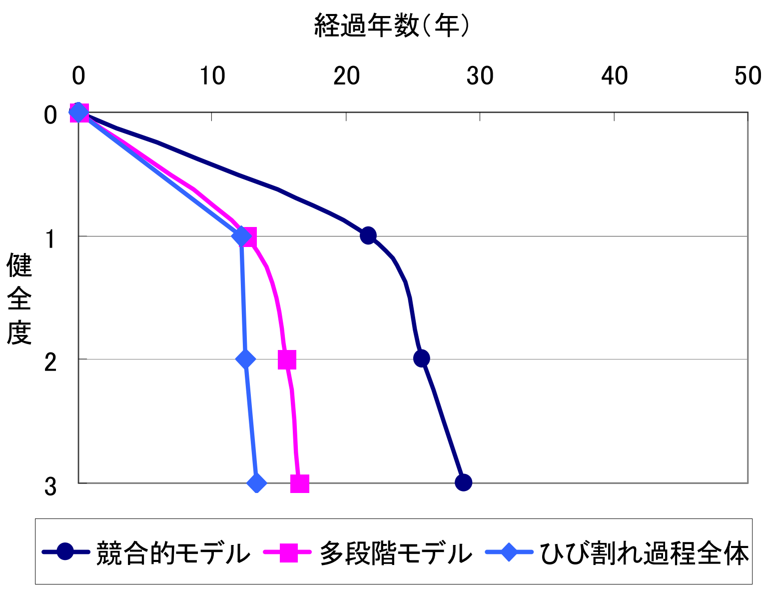
ドモデルを用いた場合，横ひび割れが出現確率が小さくなっている．すなわち，**図 3-4** に示したように，階層型指数劣化ハザードモデルを用いた場合，動的サンプル選択バイアスにより，横ひび割れの競合的推移確率が過小評価される危険性がある．**3.3.4** で言及したように，競合劣化ハザードモデルで推計した競合的推移確率はマルコフ性を満足しない．競合的劣化ハザードモデルを用いた場合，タイプ別ひび割れの進行過程の推計精度は向上するが，モデルの操作性が高くないという難点がある．一方，階層型指数劣化ハザードモデルは，劣化過程をマルコフ連鎖モデルを用いて近似することにより，操作性が向上するという利点がある．いずれのモデルが望ましいかは，分析対象とする問題のタイプに依存する．しかし，階層型指数劣化ハザードモデルを用いた場合，ひび割れタイプごとの劣化速度評価を行うことはできない．タイプ別の評価を行うためには，競合的劣化ハザードモデルを用いることが必要となる．

つぎに，多段階指数劣化ハザードモデルを用いて求めた縦ひび割れ，横ひび割れの供用性曲線を**図 3-10** と**図 3-11** に示している．これらの図には，競合的劣化ハザードモデルを用いて求めた各ひび割れタイプの供用性曲線も示している．これら 2 つの図に示すように，多段階指数ハザードモデルを用いて作成した供用性曲線は，競合的劣化ハザードモデルを用いた場合よりも，より早く劣化が進行する結果となっている．多段階指数劣化ハザードモデルの推計で用いたデータベースは，各ひび割れタイプに関して劣化の速いものを集めた代表サンプルで構成されている．そのため，代表サンプルのみを用いた場合，期待寿命を過小評価する危険性がある．一方，競合的劣化ハザードモデルでは，代表サンプルとして観測されないひび割れタイプの損傷度分布に関する情報を推計に利用することが可能で



注) BM ケースは対象区間における平均的なセクションの供用性曲線を示している．また，交通量は大型交通量を示しており，区間内での最大値を 1 として基準化したものである．

図 3-10　縦ひび割れの供用性曲線 (多段階)



注) BM ケースは対象区間における平均的なセクションの供用性曲線を示している．また，交通量は大型交通量を示しており，区間内での最大値を 1 として基準化したものである．

図 3-11　横ひび割れの供用性曲線 (多段階)

ある．なお，同図には，すべてのひび割れが競合した結果，代表的サンプルとして観測されるひび割れの損傷度データを用いて作成した供用性曲線も併記している．このように代表サンプルを用いて推計した供用性曲線は，多段階指数劣化ハザードモデルを用いて推計した供用性曲線よりも，劣化が早く進行する結果となっている．このように代表値サンプルのみを用いて多段階指数劣化ハザードモデルを推計した場合，代表値サンプルのみを用いてハザードモデルを推計したことによる，サンプル選択バイアスが発生することが理解できる．

3.6　結言

本章では，道路舗装のひび割れによる劣化状態を，ひび割れタイプと損傷度という2つの状態変数で表現した．その上で，個々のタイプひび割れの進行過程を多段階指数劣化ハザードモデルで表現するとともに，個々のタイプのひび割れの中でもっとも損傷度が大きいひび割れのみが観測される状況を競合的劣化ハザードモデルを用いて表現した．つぎに，道路舗装のひび割れに関する定期測定結果に基づいて，ハザードモデルを推計し，道路の構造特性，舗装特性，および交通条件が道路舗装のひび割れ過程に及ぼす影響について分析した．さらに，東関東自動車道におけるひび割れに関する測定結果に基づいて，ひび割れ進行過程に関する実証的な知見を得ることができた．今後，他の高速道路路線を対象とした適用事例を蓄積することにより，モデルの適用性を広げる努力が必要である．また，本章で提案した方法論は，道路舗装のひび割れ過程だけでなく，多元的な特性を持つ土木構造物の劣化過程の分析に幅広く適用可能である．本章で提案した方法論に関して，今後以下のような研究課題が残されている．第1に，舗装の劣化状態に関する測定誤差の問題が考えられる．本章の適用事例で用いたデータベースは良好な測定精度を有しており，ハザードモデルの推計にあたって測定誤差が問題となることはなかった．しかし，測定精度が十分でないようなデータベースを用いてハザードモデルを推計するためには，測定誤差分布を考慮したような隠れマルコフ劣化モデルを開発することが必要となる．**4章**では，隠れマルコフモデルを用いて，点検結果に測定誤差が含まれる劣化過程をモデル化している．第2に，損傷度が進展したセクションでは，舗装の補修が実施され，サンプルが欠損する可能性がある．サンプル欠損による推計バイアスに対しては，状態変数の出現確率と観測サンプル数の比を用いて尤度関数を修正することにより対処可能である[27)]．最後に，本章で推計したマルコフ推移行列を用いて，ひび割れ補修のために必要となるライフサイクル費用を求めることが可能である．ひび割れ補修工法と計画が与えられれば，容易にライフサイクル費用を推計することができる．また，道路舗装のアセットマネジメントを行う立場からは，わだち掘れ，平坦性，段差等，他の原因で発生する道路舗装の劣化事象の発生・進行プロセスとの競合関係を考慮したライフサイクル費用評価の方法論を開発することが必要である．

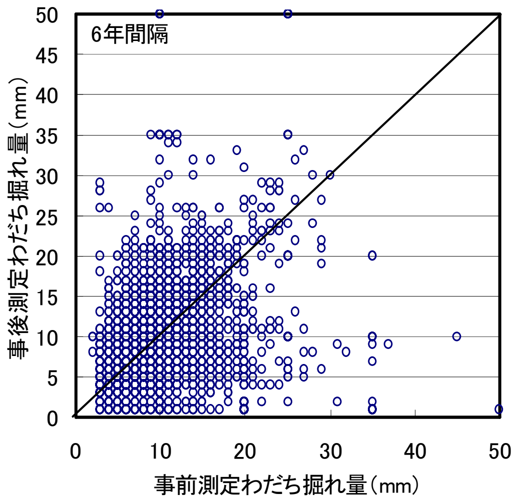
4　測定誤差を考慮した劣化予測モデル

4.1　緒言

2章，**3章**では，ひび割れ進行過程の多様性に着目し，階層型指数劣化ハザードモデルと競合的指数劣化ハザードモデルを提案した．本章では両モデルの構築にあたり，マルコフ劣化過程を用いている．マルコフ劣化モデルの適用事例では，複数の時刻で実施された劣化状態の測定結果に基づいて，マルコフ推移確率が推計されることになる．しかし，劣化状態の測定結果には，誤差が含まれる場合が少なくない．測定誤差は発生する原因は多様であるが，本章では,「対象とする道路区間に存在する劣化事象の中から，当該施設の劣化度をどの劣化事象で代表させるか」という代表値問題により発生するシステム誤差の問題に着目する．特に，舗装のような土木施設では，ひび割れ，わだち，非平坦性等といった劣化事象が膨大な数に及ぶため，路面性状調査において，常にもっとも損傷度が進んだ劣化事象が特定されるわけではない．このような代表値問題による測定誤差が発生する場合，路面性状調査における測定結果に基づいたマルコフ劣化モデルの推計結果にシステム的なバイアスが発生する．

マルコフ劣化モデルは,「真の健全度」間のマルコフ推移確率を用いて定義される．しかし，劣化状態の測定結果に誤差が存在する場合，測定結果によって得られる情報は「見かけの健全度」であり,「真の健全度」に関する情報は獲得できない．見かけの健全度を用いて推計したマルコフ推移確率が，真の推移確率に一致する保証はない．本章では，現実に測定された「見かけの健全度」と測定されない「真の健全度」の関係を混合分布モデルで表現するとともに,「真の健全度」を用いて定義されるマルコフ推移確率と，システム誤差を介在して測定される「見かけの健全度」の関係を隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現する．のちに，**5章**で考察するように，隠れマルコフ劣化モデルは，通常の最尤法を用いて推計することが困難である．そこで，本章では，隠れマルコフ劣化モデルをマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Calro:以下，MCMC と略す) シミュレーションを用いてベイズ推計する方法について考察する．

以上の問題意識の下に，本章では測定結果にシステム誤差が介在するような土木施設の劣化過程を，隠れマルコフ劣化モデルを用いて推計する方法論を提案する．さらに，道路舗装を対象として，本章で提案した方法論の有効性を検証する．以下，**4.2 節**では，本章の考え方を説明する．**4.3 節**では，システム誤差が存在しない劣化過程をマルコフ劣化モデルを用いて記述する．**4.4 節**では，システム誤差が存在するような劣化過程を隠れマルコフ劣化モデルを用いて定式化する．**4.5 節**では，隠れマルコフ劣化モデルを推計する方法論を提案する．**4.6 節**では，道路舗装を対象とした実証分析について考察する．



注) 45度線より上方に位置するサンプルは，時間の経過により健全度が改善された事例を表している．このようなサンプルは，理論的には存在しえない．

図 4-1 道路舗装のシステム誤差

4.2　本章の基本的な考え方

4.2.1　システム誤差と代表値問題

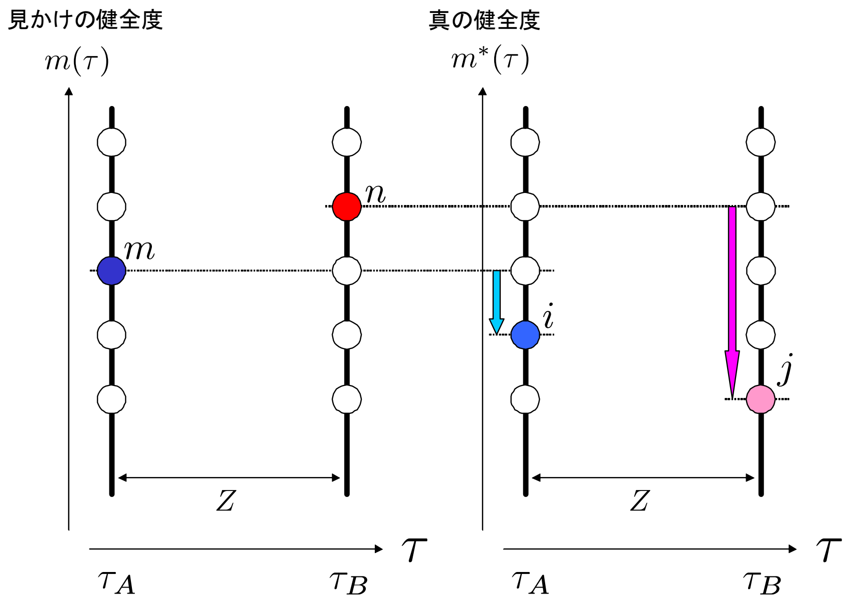
本章では，隠れマルコフ劣化モデルの適用事例として舗装の劣化過程をとりあげる．**図 4-1** は，実証分析の対象としてとりあげた舗装の劣化過程に関するデータを示したものである．図中の各点は，同一の道路区間に対して，2つの測定時刻τ_Aとτ_B $(\tau_A < \tau_B)$において測定されたわだち掘れ量の対応関係を示している．ここで，各サンプルにより，道路舗装の特性や，測定間隔は多様に異なっていることを断っておく．ただし，同図では，2つの測定時刻の間に，舗装の予防的補修が実施されなかった道路区間に関するサンプルのみを取り上げている．道路舗装の予防的補修を実施しない限り，時間の進行に伴って道路舗装の健全度が，改善されることはあり得ない．したがって，測定サンプルは，すべて図中の45度線より下方に位置しなければならない．しかし，同図に示すように，本来あり得ない45度線より上方の領域に位置するサンプルも相当程度存在し，舗装の健全度データには，かなりの程度の測定誤差が存在していることが推察できる．

このような測定誤差として，1) ランダム誤差，2) 代表値問題によるシステム誤差が考えられる．道路舗装の劣化状態を，たとえば路面性状測定車で計測する場合，必然的に機器測定に伴う測定誤差が介在してくる．これらの測定誤差は，基本的にはランダム誤差と考えることができる．もちろん，測定機器特有の誤差や測定日特有の誤差が介在する場合，システム誤差が発生する．異なる測定業務により測定された測定サンプルに対して，平均

値等マクロ的な特性を比較検討することにより，システム誤差が存在するかどうかを検討することが必要であることは言うまでもない．しかし，舗装の劣化状態の測定結果には，別のシステム的な理由により発生する測定誤差が存在する．道路舗装の劣化により現れるわだち，ひび割れ，非平坦性等の個別の現象を劣化事象と呼ぼう．ある道路区間における舗装の健全度は，その道路区間の中に存在する劣化事象に基づいて定義される．ところが，道路区間の中には，膨大な数の劣化事象が存在しており，路面性状調査によりすべての劣化事象に関する情報が得られるわけではない．その結果，道路舗装の健全度は，道路区間に存在する劣化事象の中からランダムに抽出されたサンプルに基づいて定義されることになる．この場合，今回の測定時刻において，前回の測定時に健全度を定義したサンプルより，損傷の程度が小さい劣化事象がサンプルされる (健全度が前回よりも改善する) 場合も起こりえる．しかし，補修が実施さらない限り，前回にサンプルされた劣化事象は，少なくとも損傷が改善されずに残存しているわけであり，健全度が改善されるはずはない．この場合，当該道路区間の健全度を定義する際に,「どの劣化事象が代表としてとりあげられているのか」ということが問題となる．このように，土木施設の健全度が異なる劣化事象に基づいて定義されることによるシステム誤差を代表値問題(representation matter)と呼ぶこととしよう．

土木施設の劣化状態を評価する場合，対象とする施設に存在する劣化事象の中で，もっとも損傷度が進行した劣化事象に基づいて健全度が定義されることが多い．例えば，実証分析の対象事例では，同一道路区間に対して3箇所の舗装状態を測定し，その中からもっとも損傷度が進んだ箇所の健全度を用いて，当該道路区間の健全度を代表させている．あるいは，道路区間をさらに複数区間に細分化し，細分化された各区間のもっとも損傷が進んだ箇所の健全度を求めるとともに，これらの健全度の平均値を区間全体の健全度として定義することもある．このような方法で健全度を定義しても，時間の経過とともに，健全度が回復するという事象は理論的には起こり得ない．しかし，路面性状調査により獲得されたデータは，劣化事象の中からサンプル抽出されたものであり，常に損傷がもっとも進んだ劣化事象が抽出されるわけではない．したがって，ランダム抽出された劣化事象で定義される健全度は，真の健全度より損傷の程度が少なくなるというシステム的なバイアスが発生することになる．本章では，現実の舗装の測定データに基づいて，システム誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデルを作成するとともに，舗装の測定結果にシステム的な測定バイアスが存在するかどうかを実証的に分析する．なお，舗装劣化予測の実務では，**図4-1**の45度線以上に位置するサンプルをデータベースから除去し，45度線より下方に位置するサンプルのみを用いて劣化曲線を推計する場合が多い．しかし，この場合でも，代表値問題によるシステム的な推計バイアスの問題は解決していない．

4.2.2　システム誤差と隠れマルコフ劣化過程



注) システム的誤差により，時間の経過により見かけの健全度が改善された事例を表している．システム的誤差が存在するため，見かけの健全度は，常に真の健全度より上方に位置している．

図 4-2 健全度とシステム誤差

健全度の測定にシステム誤差が存在する場合に生起する問題を**図 4-2** を用いて説明しよう．土木施設の真の劣化状態がI個のレーティング指標 (本章では，健全度と呼ぶ) i ($i = 1, \cdots, I$) で表現されると考えよう．$i = 1$の場合，健全度がもっとも優れた状態にあり，$i = I$はもっとも悪い状態と対応している．いま，ある時刻τ_Aで健全度を測定した結果，健全度が$m(\tau_A) = m$ ($m = 1, \cdots, I$) であると判定されたとしよう．しかし，測定の結果には，測定誤差が含まれる可能性がある．時刻τ_Aにおける真の (システム誤差がない) 健全度を$m^*(\tau_A) = i$ ($i = 1, \cdots, I$) と表そう．健全度調査の結果にシステム誤差が存在する場合，測定によって得られた「見かけの健全度」$m(\tau_A) = m$が,「真の健全度」$m^*(\tau_A) = i$に一致する保証はなく，真の健全度より小さい値が観測される可能性がある．ここで，健全調査による測定結果が，離散的確率分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$に従って分布すると考えよう．ただし，確率分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$は,「真の健全度」が$i$であるときに，健全度が$m$と判定される条件付き確率分布 (以下，条件付システム誤差分布と呼ぶ) である．また，$\boldsymbol{\alpha}_i$は，確率分布を特徴づけるパラメータベクトルである．つぎに，時刻τ_Aから，ある一定の時間zが経過した時刻$\tau_B = \tau_A + z$に，再び測定を実施したとしよう．健全調査による測定結果を$m(\tau_B) = n$と，時刻τ_Bにおける「真の健全度」を$m^*(\tau_B) = j$と表そう．この2つの健全度も互いに一致する保証はない．以上の測定結果より，期間$[\tau_A, \tau_B)$の間に生起する「見かけの健全度」の変化パターンは$m \to n$となる．一方,「真の健全度」の推移パターンは$i \to j$である．シ

ステム誤差が存在する場合，それぞれの時刻で測定された健全度が「真の健全度」であるかどうかは判らない．したがって，健全度調査によって測定されるのは「見かけの推移パターン」$m \to n$であり,「真の推移パターン」$i \to j$は測定されないことになる.「見かけの推移パターン」に関するデータに基づいて，健全度間の推移確率π_{mn}を推計しても，それが「真の推移パターン」に基づいて定義される推移確率π_{ij}に一致する保証はない．このように，測定結果に誤差が介在する場合,「真の健全度」間で定義されるマルコフ劣化過程が，システム誤差を含んだ「見かけの健全度」の間で定義されるマルコフ連鎖の背後に隠れてしまうという現象が生じる.

本章では，このようにシステム誤差を含んだ見かけのデータの中に，真の劣化過程を表すマルコフ連鎖が隠れている状況を隠れマルコフ劣化モデルを用いてモデル化する点に特徴がある．隠れマルコフ劣化モデルでは，測定結果に誤差が含まれるメカニズムを表す確率$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$と,「真の健全度」に対して定義される推移確率$\pi_{ij}$を同時推計することが課題となる．なお，正確には,「真の健全度」iが測定できないため,「見かけの健全度」mが,異なる条件付システム誤差分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$ $(i = 1, \cdots, I)$の中から，どの条件付システム誤差分布により発生したデータなのかも判らない．したがって,「見かけの健全度」に関するデータを発生した条件付システム誤差分布を推計する方法論が必要となる．このため，隠れマルコフ劣化モデルの推計問題は複雑となるが，推計方法に関しては**4.5節**で考察する.

4.3　マルコフ劣化モデル

4.3.1　モデル化の前提条件

土木施設の劣化過程をモデル化するために，ひとまずシステム誤差が存在せず，常に真の健全度が測定される場合を考えよう．システム誤差を考慮した劣化過程に関しては，**4.4節**で議論する．土木施設の劣化予測モデルを推定するためには，施設の劣化状態に関する時系列データを蓄積することが必要となる．いま，ある土木施設の劣化に関する履歴が**図4-3**に示すように与えられたとする．同図は，施設が補修されずに放置された時に，劣化がどのように進展するかを表したものである．現実には，施設の劣化過程には不確実性が含まれ，しかも劣化状態は時間軸上の限られた時刻で実施される測定を通じてのみ知ることができる．図中，時刻τはカレンダー上の実時刻 (以下，時刻と呼ぶ) を表す．時刻τ_0で土木施設の使用が開始された直後から劣化が始まる．**4.2.2** で議論したように，施設の劣化状態はI個の健全度で記述される．施設の健全度を表す状態変数をi $(i = 1, \cdots, I)$で表現しよう．施設がもっとも健全な (劣化が進展していない) 状態を$i = 1$で表し，状態変数iの値が大きくなるほど，劣化が進展していることを表す．$i = I$の場合，当該の施設が使用限界に到達していることを表す．図中の時刻τ_i $(i = 1, \cdots, I-1)$において，健全度がiから$i+1$に移行している．しかし，測定は同図における2つの時刻τ_A, τ_Bにおいて実施される．したがって，測定者が獲得できる情報は，測定時刻における健全度のみであり，健

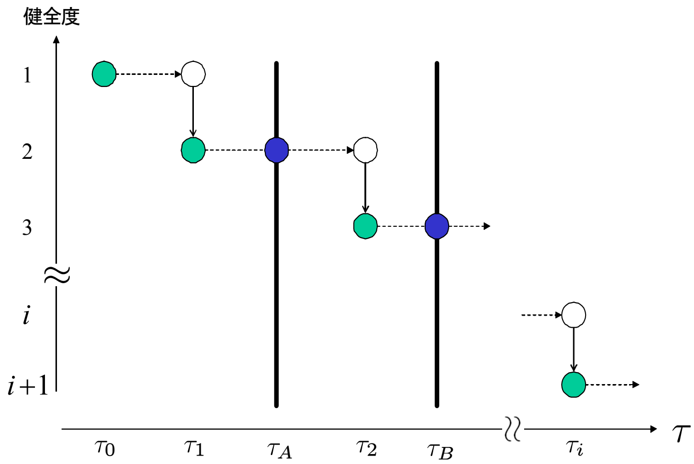


図 4-3 劣化過程

全度が推移した時刻τ_i $(i = 1, \cdots, I-1)$ に関する情報は得られない．

4.3.2　マルコフ劣化モデル

土木施設の劣化過程をマルコフ劣化モデルを用いて表現しよう．いま，2 つの時刻間における真の健全度間の推移状態をマルコフ推移確率で表現する．時刻τ_Aにおける真の健全度を状態変数 $m^*(\tau_A)$ を用いて表そう．時刻τ_Aにおける真の健全度が i $(i = 1, \cdots, I)$ であれば $m^*(\tau_A) = i$ と表せる．マルコフ推移確率は，時刻τ_Aで測定された真の健全度 $m^*(\tau_A) = i$ を与件とし，将来時刻 (たとえばτ_B) において真の健全度 $m^*(\tau_B) = j$が生起する条件付推移確率として定義される．すなわち，

$$\mathrm{Prob}[m^*(\tau_B) = j | m^*(\tau_A) = i] = \pi_{ij} \tag{4.1}$$

と表せる．このような推移確率を真の健全度ペア (i, j) に対して求めれば，マルコフ推移確率行列

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{II} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

を定義できる．マルコフ推移確率 (4.1) は所与の 2 つの時刻τ_A，τ_Bの間において生じる真の健全度間の推移確率を示したものであり，当然のことながら，対象とする測定間隔が異なれば推移確率の値は異なる．補修がない限り常に劣化が進行するので，$\pi_{ij} = 0$ $(i > j)$ が成立する．また，推移確率の定義より$\sum_{j=i}^{I} \pi_{ij} = 1$ が成立する．すなわち，マルコフ推

移確率に関して

$$\left.\begin{array}{l} \pi_{ij} \geq 0 \ (i, j = 1, \cdots, I) \\ \pi_{ij} = 0 \ (i > j\text{の時}) \\ \sum_{j=i}^{I} \pi_{ij} = 1 \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

が成立しなければならない．状態Iは，補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり，$\pi_{II} = 1$が成立すると考える．なお，マルコフ推移確率は過去の劣化履歴とは独立して定義される．マルコフ推移確率モデルでは，真の健全度が$i-1$からiに推移した時刻に関わらず，測定時刻τ_Aから測定時刻τ_Bの間に推移する確率は時刻τ_Aにおける真の健全度のみに依存するという性質 (マルコフ性) を満足する．

4.3.3　多段階指数ハザードモデル

マルコフ推移確率は，多段階指数ハザードモデルを用いて推定できる．本章では，津田等[23)]が開発した多段階指数ハザードモデルを用いる．同モデルは，**3章**でも説明したが，本章では対象とする劣化現象が単一であるため，表記を明確にするためにモデルの概要を再度説明しておく．いま，真の健全度i $(i = 1, \cdots, I-1)$の寿命を確率変数ζ_iで表す．真の健全度iの寿命が，確率密度関数$f_i(\zeta_i)$，分布関数$F_i(\zeta_i)$に従うと仮定する．時刻τ_Aにおける真の健全度iであり，そこから時間y_iが経過した時刻で真の健全度$i+1$に到達する確率密度をハザード関数[29),51)]$\lambda_i(y_i)$を用いて表現する．この時，ハザード関数は，供用時間y_iまで真の健全度がiのまま継続する生存確率$\tilde{F}_i(y_i)$を用いて，

$$\lambda_i(y_i)\Delta y_i = \frac{f_i(y_i)\Delta y_i}{\tilde{F}_i(y_i)} \tag{4.4}$$

と表せる．すなわち，ハザード関数$\lambda_i(y_i)$は，初期時刻から時間y_iが経過するまで真の健全度iの状態が継続したという条件の下で，期間$[y_i, y_i + \Delta y_i)$中に真の健全度$i+1$に進展する条件付確率である．ハザード関数がサンプル時間軸上の時刻y_iに依存せず，常に一定値$\theta_i > 0 (i = 1, \cdots, I-1)$をとる場合，指数ハザード関数

$$\lambda_i(y_i) = \theta_i \tag{4.5}$$

が成立する．指数ハザード関数を用いることにより，劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現できる．さらに，指数ハザード関数を用いれば，真の健全度iの寿命がy_i以上となる確率$\tilde{F}_i(y_i)$は，

$$\tilde{F}_i(y_i) = \exp(-\theta_i y_i) \tag{4.6}$$

と表現できる．

さらに，サンプル時間軸上のτ_Aで，真の健全度がiであり，かつ時刻τ_Aから追加的に$z\ (\geq 0)$以上にわたって真の健全度iが継続する確率$\tilde{F}_i(\tau_A+z|\zeta_i\geq\tau_A)$は,

$$\begin{aligned}\tilde{F}_i(\tau_A+z|\zeta_i\geq\tau_A)&=\mathrm{Prob}\{\zeta_i\geq\tau_A+z|\zeta_i\geq\tau_A\}\\&=\frac{\exp\{-\theta_i(\tau_A+z)\}}{\exp(-\theta_i\tau_A)}=\exp(-\theta_i z)\end{aligned}\tag{4.7}$$

と表される．すなわち，測定時刻τ_Aにおいて真の健全度がiと判定され，次の測定時刻$\tau_B=\tau_A+z$においても真の健全度がiと判定される確率は,

$$\mathrm{Prob}[m^*(\tau_B)=i|m^*(\tau_A)=i]=\exp(-\theta_i z)\tag{4.8}$$

となる．ただし，zは2つの測定時刻の間隔を表す．確率$\mathrm{Prob}[m^*(\tau_B)=i|m^*(\tau_A)=i]$はマルコフ推移確率$\pi_{ii}(z)$にほかならない．指数ハザードを用いた場合，推移確率$\pi_{ii}(z)$はハザード関数θ_iと測定間隔zのみに依存し，時刻τ_A，τ_Bに関する情報を用いなくとも推移確率を推定することが可能となる．以上の議論を拡張し，指数ハザード関数を用いて，測定時刻τ_Aと$\tau_B=\tau_A+z$の間で真の健全度がiから$j\ (>i)$に推移するマルコフ推移確率$\pi_{ij}(z)\ (i=1,\cdots,I-1;j=i,\cdots,I)$は,

$$\begin{aligned}\pi_{ij}(z)&=\mathrm{Prob}[m^*(\tau_B)=j|m^*(\tau_A)=i]\\&=\sum_{k=i}^{j}\prod_{m=i}^{k-1}\frac{\theta_m}{\theta_m-\theta_k}\prod_{m=k}^{j-1}\frac{\theta_m}{\theta_{m+1}-\theta_k}\exp(-\theta_k z)\\&\quad(i=1,\cdots,I-1;j=i+1,\cdots,I)\end{aligned}\tag{4.9}$$

と表すことができる[23)]．ただし，表記上の規則として,

$$\begin{cases}\prod_{m=i}^{k-1}\frac{\theta_m}{\theta_m-\theta_k}=1 & (k=i\text{の時})\\ \prod_{m=k}^{j-1}\frac{\theta_m}{\theta_{m+1}-\theta_k}=1 & (k=j\text{の時})\end{cases}$$

が成立すると考える．さらに，表記の便宜上,

$$\prod_{m=i,\neq k}^{k-1}\frac{\theta_m}{\theta_m-\theta_k}\exp(-\theta_k z)=\prod_{m=i}^{k-1}\frac{\theta_m}{\theta_m-\theta_k}\prod_{m=k}^{j-1}\frac{\theta_m}{\theta_{m+1}-\theta_k}\exp(-\theta_k z)$$

と簡略化する．また，π_{iI}に関しては，マルコフ推移確率の条件より次式で表せる.

$$\pi_{iI}(z)=1-\sum_{j=i}^{I-1}\pi_{ij}(z)\ (i=1,\cdots,I-1)\tag{4.10}$$

4.3.4　期待劣化曲線

土木施設の劣化特性は，施設の環境条件や構造・機能的な道路特性に依存して変化する．多段階指数ハザードモデルを用いれば，土木施設の特性別にマルコフ推移確率を求めるこ

とができる．いま，多段階指数ハザードモデルのハザード率θ_i $(i=1,\cdots,I-1)$を施設特性$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_M)$を用いて次式により表そう．

$$\theta_i=\theta_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}_i' \tag{4.11}$$

ただし，$\boldsymbol{\beta}_i=(\beta_{i1},\cdots,\beta_{iM})$は未知パラメータ$\beta_{im}$ $(m=1,\cdots,M)$の行ベクトルである．記号$\prime$は転置操作を表す．劣化推移確率はデータが観察された測定間隔zに依存する．したがって，推移確率π_{ij}を目視測定による実測データ$(z,\boldsymbol{x})$と未知パラメータ$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{I-1})$の関数として$\pi_{ij}(z,\boldsymbol{x}:\boldsymbol{\beta})$と表すことができる．さらに，ハザード率$\theta_i(\boldsymbol{x})$を用いた生存関数を$\tilde{F}_i(y_i|\theta_i(\boldsymbol{x}))$と表記する．生存関数$\tilde{F}_i(y_i|\theta_i(\boldsymbol{x}))$が式(4.6)で表されることに留意すれば，特性$\boldsymbol{x}$を有する土木施設が，健全度$i$にはじめて到達した時刻から，劣化が進展し次の健全度に進むまでの期待期間長(以下，健全度期待寿命と呼ぶ) $RMD_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1,\cdots,I-1)$は，

$$\begin{aligned}RMD_i(\boldsymbol{x})&=\int_0^\infty \tilde{F}_i(y_i|\theta_i(\boldsymbol{x}))dy_i\\&=\int_0^\infty\{-\theta_i(\boldsymbol{x})y_i\}dy_i=\frac{1}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}_i'}\end{aligned} \tag{4.12}$$

と表される．土木施設の補修直後の健全度を$i=1$としよう．この時，初期時刻の健全度$i=1$の状態から劣化が進行し，健全度がj (>1)に推移するまでに要する平均的経過時間$ET_j(\boldsymbol{x})$ $(j=2,\cdots,I)$は

$$ET_j(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{\boldsymbol{x}\boldsymbol{\beta}_i'} \tag{4.13}$$

と表される．$ET_j(\boldsymbol{x})$ $(j=2,\cdots,I)$は，直近の補修時刻から健全度jに到達するまでの平均的な経過時間を表す．本章では，健全度j $(j=1,\cdots,I)$と平均的経過時間$ET_j(\boldsymbol{x})$の関係を期待劣化曲線と呼ぶ．

4.4　隠れマルコフ劣化モデルの定式化

4.4.1　隠れマルコフ劣化モデル

隠れマルコフ連鎖モデルは，測定される状態変数に誤差が介在するようなマルコフ連鎖モデルである．隠れマルコフ連鎖に関する理論的研究に関しては研究の蓄積があり，いくつかの成書[52)]で詳細に紹介されている．しかし，隠れマルコフ連鎖の推計方法に関しては，のちに**4.3.3** で言及するような困難性が存在するため，十分な研究が蓄積されていない．そのため，隠れマルコフ連鎖モデルの適用事例もそれほど多くない．近年になり，時系列モデルに関する研究の発展とともに，動的混合分布モデルと呼ばれる時系列統計モデルに関する研究が進展した．隠れマルコフ連鎖モデルは，動的混合分布モデルの中で，レジー

ム遷移(regime switching)モデルと類似の確率構造を有している．このため，レジーム推移モデルの推計方法を，隠れマルコフ連鎖モデルの推計にも適用できることが判明した．

レジーム遷移モデルは，Hamilton[53]によって提案され，景気分析や金融計量経済学の分野で応用研究が急速に進展しつつある．レジーム遷移モデルでは，時系列データの構造変化を，レジーム間の推移現象として把握し，レジーム間推移確率を非線形時系列モデルとして定式化する[54]．たとえば，Hamilton[53]は，レジーム間の推移確率過程をMarkov過程で表現したようなマルコフ遷移モデルを提案している[55]．マルコフ遷移モデルは，時系列データの推移過程をマルコフ連鎖を用いて表現するモデルである．マルコフ遷移モデルの推計方法の発展により，隠れマルコフ連鎖モデルの推計上の困難性も克服されることが判明した．とりわけ，MCMC (Markov Chain Monte Carlo: マルコフ連鎖モンテカルロ) 法の発展が，マルコフ遷移モデルの推計に大きく貢献している．すでに，MCMC法を用いた隠れマルコフ連鎖モデルの推計方法に関しても，いくつかの研究事例がある[41]．しかし，これらの既往研究では，マルコフ推移確率を直接求めることを目的としており，**4.2.1** で言及した集計的手法に属する．本章では，非集計的方法でマルコフ推移確率を求めることを目的としており，このような立場から隠れマルコフ連鎖モデルを推計する研究事例は他に見あたらない．

4.4.2　混合分布モデル

土木施設の劣化過程は不確実であり，マルコフ劣化モデル(4.2)に従うと考えよう．時間軸上の時刻τ_Aにおいて測定が実施され，対象施設の見かけの健全度$m(\tau_A) = m$ $(m = 1, \cdots, I)$が測定されたとする．ただし，測定結果に誤差が含まれるため，測定された見かけの健全度mが，真の健全度$m^*(\tau_A) = i$ $(i = 1, \cdots, I)$に一致しているかどうかは判らない．いま，時刻τ_Aにおける真の健全度が$m^*(\tau_A) = i$であると仮定しよう．この時，見かけの健全度$m(\tau_A) = m$が測定される確率分布を$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$と表そう．$\boldsymbol{\alpha}_i$は，確率分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$を特徴づけるパラメータベクトルである．以下，この確率分布を条件付システム誤差分布と呼ぶ．条件付システム誤差分布は，真の健全度ごとに定義される．条件付システム誤差分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$は，時間に依存しないと仮定する．ここで，測定者にとって，真の健全度iが不確実であることに留意しよう．すなわち，測定された見かけの健全度が，いずれの条件付システム誤差分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$ $(i = 1, \cdots, I)$から発生されたサンプルなのかが不確実である．ここで，見かけの健全度$m(\tau_A) = m$が測定される尤度$\ell(m(\tau_A) = m)$を

$$\ell(m(\tau_A) = m) = \sum_{i=1}^{I} \pi_i(\tau_A) f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i) \tag{4.14}$$

と表そう．$\pi_i(\tau_A)$は見かけの健全度$m(\tau_A) = m$が$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$から生成される確率である．この確率は，時刻$\tau_A$で真の健全度が$m$である確率に等しい．言い換えれば，互いに排反な$I$個の原因のうち，原因$i$によって事象$m(\tau_A) = m$が発生する確率が$\pi_i(\tau_A)$であるとみなせ

る．式 (4.14) は，複数の条件付システム誤差分布を加重平均した確率分布を表しており，混合分布モデル (mixture distribution model)[48) と呼ばれる．

つぎに，2 つの測定時刻τ_A, τ_B ($\tau_A < \tau_B$) に着目し，時刻τ_Aに見かけの健全度$m(\tau_A) = m$が測定され，かつ時刻$\tau_B = \tau_A + z$に，見かけの健全度$m(\tau_B) = n$が同時に測定される尤度$\ell(m(\tau_A) = m, m(\tau_B) = n)$を再帰的に定義しよう．まず，時刻$\tau_A$で真の健全度が$i$であることが判明しているときに，時刻$\tau_B$で見かけの健全度$m(\tau_B) = n$が測定される条件付尤度$\ell_i(m(\tau_B) = n)$は

$$\ell_i(m(\tau_B) = n) = \sum_{j=i}^{I} \pi_{ij}(z) f_j(n|\boldsymbol{\alpha}_j) \tag{4.15}$$

と表される．しかし，時刻τ_Aにおける真の健全度も観測できない．いま，時刻τ_Aで真の健全度がiである確率を$\pi_i(\tau_A)$とすれば，時刻τ_Bに，見かけの健全度$m(\tau_B) = n$が測定される尤度$\ell(m(\tau_B) = n)$は

$$\begin{aligned}\ell(m(\tau_B) = n) &= \sum_{i=i}^{I} \pi_i(\tau_A) \ell_i(m(\tau_B) = n) \\ &= \sum_{i=i}^{I} \pi_i(\tau_A) \sum_{j=i}^{I} \pi_{ij}(z) f_j(n|\boldsymbol{\alpha}_j)\end{aligned} \tag{4.16}$$

と表される．さらに，時刻τ_Aにおいて，真の健全度がiの時に，見かけの健全度$m(\tau_A) = m$が測定される確率が$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$で表されることより，時刻$\tau_A$に見かけの健全度$m(\tau_A) = m$が測定され，かつ時刻$\tau_B$に，見かけの健全度$m(\tau_B) = n$が同時に測定される尤度$\ell(m(\tau_A) = m, m(\tau_B) = n)$ は

$$\ell(m(\tau_A) = m, m(\tau_B) = n) = \sum_{i=1}^{I} \pi_i(\tau_A) f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i) \left(\sum_{j=i}^{I} \pi_{ij}(z) f_j(n|\boldsymbol{\alpha}_j) \right) \tag{4.17}$$

と表される．式 (4.17) に示すように，見かけの健全度$m(\tau_A) = m$と$m(\tau_B) = n$が抽出される確率$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$, $f_j(n|\boldsymbol{\alpha}_j)$は，互いに，マルコフ推移確率$\pi_{ij}(z)$を通じて相関がある．すなわち，時刻$\tau_B$における見かけの健全度の生起確率は,「時刻$\tau_A$における見かけの健全度がどの確率密度から生成されたか」に依存しているため，時間を通じて測定される見かけの健全度の時系列データは互いに独立にはならない．

4.4.3　初期値問題

尤度 (4.17) には，真の健全度に関する初期分布$\pi_i(\tau_A)$，マルコフ推移確率$\pi_{ij}(z)$，条件付システム誤差分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$という 3 種類の未知確率が存在する．このうち，初期分布$\pi_i(\tau_A)$に関する先験的情報が存在しないという問題 (初期値問題と呼ぶ) がある．初期値問題を克服する 1 つの方法は，初期分布としてノンパラメトリック分布を与える方法がある．しかし，多様なサンプルごとに初期分布が異なるため，膨大な数のパラメータが必要となる．

本章では，更新，補修時刻で，健全度が $i=1$ に回復すると考えよう．すなわち，更新・補修直後の時刻 τ_0 における初期値分布に関して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(\tau_0) &= \{\pi_1(\tau_0),\cdots,\pi_I(\tau_0)\} \\ &= (1,0,\cdots,0)\end{aligned} \tag{4.18}$$

が成立すると考える．このように，更新・補修直後の時刻における初期値分布を設定することにより，初期値問題を克服することが可能になる．

いま，直近の補修・更新時刻 τ_0 以降，健全度が測定された時刻を $\tau_1,\cdots,\tau_T$ と表そう．T は直近の更新・補修以降の測定回数を表す．時刻 τ_t に測定された見かけの健全度を $m(\tau_t)=m_t$ $(t=1,\cdots,T)$ と表そう．さらに，第 $t-1$ 回目の測定と t 回目の測定間隔を z_t $(t=1,\cdots,T)$ と表そう．この時，測定間隔ベクトル $\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_T)$ を与件とし，健全度 $\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_T)$ が測定される尤度関数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{m},\boldsymbol{z})$ を再帰的に定義すれば

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{m},\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{I}\pi_{1j}(z_1)f_j(m_1|\boldsymbol{\alpha}_j)\ell_j(1) \tag{4.19a}$$

$$\ell_h(t) = \sum_{j=h}^{I}\pi_{hj}(z_t)f_j(m_t|\boldsymbol{\alpha}_j)\ell_j(t+1) \quad (1\le t\le T-1) \tag{4.19b}$$

$$\ell_h(T) = \sum_{j=h}^{I}\pi_{hj}(z_T)f_j(m_T|\boldsymbol{\alpha}_j) \tag{4.19c}$$

と表される．津田ら[23)]は，多段階指数ハザードモデル (4.9) を最尤法を用いて推定する方法を提案している．しかし，隠れマルコフ劣化モデルの尤度関数 (4.19a)-(4.19c) は最尤法に適さない性質を持っていることが知られている[45)]．特に，尤度関数が $\pi_{ij}(z)$ に関して高次の非線形多項式となっており，1 階の最適化条件が (複素数解を含めて) 非常の多くの解を有している点にある．さらに，最適化条件の (複数個の) 実数解が 0 と 1 の間にある保証がない点である．最尤法の代わりにベイズ推定法を用いれば，高次の非線形多項式を解く問題を回避できる．しかし，尤度関数 (4.19a)-(4.19c) が，極めて多くの項を含んでおり，計算量が膨大になってしまう欠点がある[46)−50)]．このような最尤法の難点を克服するために，尤度関数の完備化操作が必要となる．

4.4.4 完備化操作

ある土木施設に対して，測定時刻 τ_t $(t=1,\cdots,T)$ において見かけの健全度 $\boldsymbol{m}=(m_1,\cdots,m_T)$ が測定できたと考えよう．さらに，隠れマルコフ劣化モデルを推計するために，見かけの健全度 $\boldsymbol{m}$ が，どの真の健全度を持つ条件付システム誤差分布から生成されたかを示す潜在変数ベクトル $\boldsymbol{s}=(s_0,\cdots,s_T)$ を導入しよう．ただし，劣化過程の性質より，施設が補修さ

れない限り,

$$s_0 = 1 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_T \leq I \tag{4.20}$$

を満足する．真の健全度は本来測定不可能であり，潜在変数$\boldsymbol{s}$は，本来測定不可能な変数である．議論の便宜上，ひとまず潜在変数が仮に測定できたと考えよう．さらに，潜在変数$\boldsymbol{s}$の測定結果に基づいて，ダミー変数

$$\delta_{ti} = \begin{cases} 1 & s_t = i \\ 0 & s_t \neq i \end{cases} \qquad (t = 1, \cdots, T; i = 1, \cdots, I) \tag{4.21}$$

を導入しよう．見かけの健全度$\boldsymbol{m}$，潜在変数$\boldsymbol{s}$，測定間隔$\boldsymbol{z}$を与件とした尤度関数(4.19a)-(4.19c)は

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{z}) &= \prod_{i=1}^{I} \left\{ \pi_{1i}(z_1)^{\delta_{1i}} f_i(m_1|\boldsymbol{\alpha}_i)^{\delta_{1i}} \prod_{t=2}^{T} \prod_{j=i}^{I} \pi_{ij}(z_t)^{\delta_{t-1i}\delta_{tj}} f_j(m_t|\boldsymbol{\alpha}_j)^{\delta_{tj}} \right\} \\ &= \prod_{t=1}^{T} \left\{ \pi_{s_{t-1}s_t}(z_t) f_{s_t}(m_t|\boldsymbol{\alpha}_{s_t}) \right\} \\ &= \prod_{t=1}^{T} \pi_{s_{t-1}s_t}(z_t) \prod_{t=1}^{T} f_{s_t}(m_t|\boldsymbol{\alpha}_{s_t}) \end{aligned} \tag{4.22}$$

と表現できる[47)]．以上の操作を完備化(completion)と言う．完備化された尤度関数 (以下，完備化尤度関数と呼ぶ) (4.22)は，通常の尤度関数(4.19a)-(4.19c)より大幅に簡略化されていることが理解できる．ただし，尤度関数(4.22)の中に含まれる潜在変数$\boldsymbol{s}$は，測定できない変数である．そこで，完備化尤度関数を用いて，潜在変数の確率分布を推計することを考える．完備化尤度関数を展開すれば，潜在変数$\boldsymbol{s}$に関する全条件付事後分布(full conditional posterior distribution)を導出できる．劣化過程の特性により，補修が実施されない限り，条件(4.20)が成立する．ここで，$\boldsymbol{s}_{-t} = (s_1, \cdots, s_{t-1}, s_{t+1}, \cdots, s_T), \boldsymbol{s}^i_{-t} = (s_1, \cdots, s_{t-1}, i, s_{t+1}, \cdots, s_T)$とすれば，$s_t = i$ $(i \in \{s_{t-1}, \cdots, s_{t+1}\})$の全条件付事後確率は，ベイズの法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\{s_t = i|\boldsymbol{s}_{-t}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}\} &= \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{s}^i_{-t}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{z})}{\sum_{i=s_{t-1}}^{s_{t+1}} \tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{s}^i_{-t}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{z})} \\ &= \frac{\omega_{it} f_i(m_t|\boldsymbol{\alpha}_i)}{\sum_{j=s_{t-1}}^{s_{t+1}} \omega_{jt} f_j(m_t|\boldsymbol{\alpha}_j)} \end{aligned} \tag{4.23}$$

と表される．ただし，

$$\omega_{jt} = \begin{cases} \pi_{1j}\pi_{js_2} & t = 1 \\ \pi_{s_{t-1}j}\pi_{js_{t+1}} & 2 \leq t \leq T \\ \pi_{s_{T-1}j} & t = T \end{cases} \tag{4.24}$$

と表される．すなわち，真の健全度間の推移確率$\pi_{ij}(z)$ $(i=1,\cdots,I; j=i,\cdots,I)$と条件付システム誤差分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$ $(i=1,\cdots,I)$が求まれば，$\boldsymbol{s}_{-t}$を与件とした時刻tの真の健全度$s_t \in \{s_{t-1},\cdots,s_{t+1}\}$の全条件付事後確率を求めることができる．完備化尤度関数(4.22)では，潜在変数$\boldsymbol{s}$は確定的である．ただし，条件付システム誤差分布, 真の健全度間の推移確率には未知パラメータ$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$が含まれており，潜在変数に関する全条件付事後確率を先験的に求めることができない．全条件付事後確率(4.23)を用いたMCMC法を用いて，反復的に潜在変数$\boldsymbol{s}$をランダム発生させ，パラメータ$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$をベイズ推計することになる．これらの未知パラメータと全条件付き事後確率を求める方法についても，**4.5.4**で改めてとりあげる．このような手続きにより，完備化尤度関数を用いて求めたパラメータのベイズ推計値が，真の尤度関数を用いて求めたパラメータの最尤推定値に収束することが証明されている[48)]．

4.4.5　条件付システム誤差分布

条件付システム誤差分布$f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$は，真の健全度が$m^*(\tau_t)=i$の時に，見かけの健全度$m(\tau_t)=m$が測定される確率分布を表している．ただし，条件付システム誤差分布の関数形は，測定時刻τ_t $(t=1,\cdots,T)$に依存せず，時間を通じて一定であると仮定する．いま，対象とする施設の真の健全度がi $(i=1,\cdots,I)$であるとしよう．しかし，測定機器により測定される健全度が，真の健全度に一致する保証はない．健全度の測定結果にシステム誤差が介在し，見かけの健全度m $(m=1,\cdots,i)$が測定されることになる．

測定結果にシステム誤差が介在する場合，真の健全度iと見かけの健全度mの間に$m \leq i$という関係が存在する．例えば，本章の実証分析では，道路舗装の劣化問題をとりあげるが，そこでは単位道路区間内の3つの代表地点における健全度を測定し，その中でもっとも損傷が大きい地点の健全度により，当該区間の健全度として定義している．しかし，当該路区間におけるすべての地点における劣化事象を測定しているわけではないため，ランダムサンプリングにより測定した劣化事象が，当該道路区間においてもっとも損傷が進んだ劣化事象である保証はない．ここで，対象とする土木施設において，もっとも損傷が進んだ劣化状態で定義される真の健全度iに対して，見かけの健全度mが選択される確率を定義しよう．本章では，このようなシステム誤差が右切断されたノンパラメトリックな離散的確率分布$g_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$ $(m=1,\cdots,i)$に従うと考える．すなわち，真の健全度がiの場合に，見かけの健全度がm $(m \leq i)$となる確率$g_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$は

$$g_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i) = \begin{cases} 0 & m > i\text{の時} \\ \alpha^i_m & m \leq i\text{の時} \end{cases} \tag{4.25}$$

と表される．ただし，α^i_mは定数であり，

$$0 \leq \alpha^i_m \leq 1 \tag{4.26a}$$

$$\sum_{m=1}^{i} \alpha_m^i = 1 \tag{4.26b}$$

を満足する．誤差発生メカニズム (4.25) にノンパラメトリックな条件付システム誤差分布を仮定しているため，サンプル数が十分であれば，条件付システム誤差分布の特定化誤差を回避することができる．隠れマルコフ劣化モデルを推計する場合，システム誤差パラメータα_m^iを直接推計することとなる．

なお，測定誤差には，システム誤差だけでなく，ランダム誤差も存在する．しかし，識別性問題が存在するため，両者を分離計測することは困難である．両者の測定誤差を分離計測する1つの方法は，例えば，確率的フロンティア理論で採用されているように2種類の誤差項の間に構造的関係を想定することが必要となる[56),57)]．そのためには，両者の誤差分布をパラメトリックな条件付誤差分布で表現し，両者の関係構造を明示的にモデル化することが必要となる．しかし，現時刻においては，誤差発生メカニズムに関する先験的情報が存在せず，本章ではノンパラメトリックな条件付システム誤差分布を用いている．測定誤差の分離計測の問題に関しては，誤差発生メカニズムに関する知見の蓄積を待たざるを得ない．

4.5　推計方法

4.5.1　ＭＣＭＣ法

伝統的なベイズ統計学では，共役な事前・事後分布を用いて，パラメータを推計する方法が採用される[41)]．しかし，ハザードモデルの場合，簡単な指数ハザードモデルを用いても，共役事前確率分布が存在しないことが知られている[58)]．共役事前確率分布が存在しない場合，数値解析により多重積分を求めることが必要となる．このことが，ベイズ統計学をハザード解析へ適用する際に，大きな障害になっていた．しかし，近年，MCMC 法[41)]がベイズ統計学の分野に導入され，多重数値積分により基準化定数を求めなくても，効率的に事後分布を求めることが可能となった．その結果，ベイズ推計法の適用範囲は大幅に拡大したと考えることができる．すでに，MCMC 法を用いたベイズ推計法に関して，いくつかの研究が蓄積されている[41)]．代表的なMCMC 法として，ギブスサンプリング (Gibbs sampling) 法，メトロポリス・ヘイスティングス (Metropolis-Hastings : MH と略す) 法等が提案されている[41)]．この内，ギブスサンプリングはもともと画像復元のアルゴリズム[60)]として知られていたが，ベイズ推計法における事後分布の推計に応用された[?)]．ギブスサンプリング法，MH 法は，いずれも事後確率密度関数を直接求めることが難しい場合に，各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて，反復的にパラメータ$\boldsymbol{\beta}$のサンプルを乱数発生させることにより，事後分布からパラメータサンプルを獲得する方法である．すでに，筆者等はMCMC 法を用いて，マルコフ推移確率を効率的にベイズ推計することを明らかにしている．本章では，筆者等が提案したワイブル劣化モデルのベイズ推計法[25)]を

拡張し，MCMC 法を用いてシステム誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデルを推計する方法を提案する．

隠れマルコフ劣化モデルを含む混合分布モデルの推計では，前述したように尤度関数が特殊な形をしているため，通常の最尤法やベイズ推計法を用いることが困難である[45),46)]．このようなことから，混合分布モデルの推計方法として，通常の尤度関数ではなく，完備化尤度関数を定義するとともに，MCMC 法を用いて混合分布モデルを推計する方法が提案されている[48),59)]．しかし，既往の隠れマルコフ劣化モデルでは，マルコフ推移確率が定数で与えられ，これらの定数パラメータを集計的に推計するに留まっている．しかし，本章では，**3 章**で言及したように，多段階指数劣化ハザードモデルを用いて，マルコフ推移確率を推定する点に特徴がある．このような隠れマルコフ劣化モデルを推計するためには，既往の隠れマルコフ劣化モデルを推計するための MCMC 法の中に，マルコフ推移確率のベイズ推計アルゴリズムを内包したような MCMC アルゴリズムを開発することが必要になる．

4.5.2　完備化尤度関数の定式化

土木施設 k $(k=1,\cdots,K)$ に対して，直近の更新時刻以降，それぞれ合計 T^k 回にわたる測定結果が得られたとしよう．測定時刻 τ_t^k $(t=1,\cdots,T^k)$ において測定された見かけの健全度の測定値を $\bar{m}(\tau_t^k)$ と表す．ここに，記号 $^{-}$ は，測定値であることを表す．また，$\sum_{k=1}^K T^k$ 個の測定情報に関するデータを $\bar{\boldsymbol{\xi}}=(\bar{\boldsymbol{\xi}}^1,\cdots,\bar{\boldsymbol{\xi}}^K)$ と表そう．ただし，$\bar{\boldsymbol{\xi}}^k=(\bar{\boldsymbol{\xi}}_1^k,\cdots,\bar{\boldsymbol{\xi}}_{T^k}^k)$ である．また，$\bar{\boldsymbol{\xi}}_t^k=(\bar{m}_t^k,\bar{z}_t^k,\bar{\boldsymbol{x}}_t^k)$ であり，$m(\tau_t^k)=\bar{m}_t^k$ は時刻 τ_t^k における施設 k の見かけの健全度，$\bar{z}_t^k=\tau_t^k-\tau_{t-1}^k$ は測定時刻 τ_t^k と τ_{t-1}^k の間の測定間隔，$\bar{\boldsymbol{x}}_t^k$ は，時刻 τ_t^l における土木施設 k の特性ベクトルである．この時，隠れマルコフ劣化モデルの完備化尤度関数は K 個の土木施設から得られたデータの完備化同時生起確率

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\beta},\bar{\boldsymbol{\xi}}) &= \prod_{k=1}^{K}\Big\{\prod_{t=1}^{T^k}\pi_{s_{t-1}^k s_t^k}(\bar{z}_t^k)\prod_{t=1}^{T^k}f_{s_t^k}(\bar{m}_t^k|\boldsymbol{\alpha}_{s_t^k})\Big\} \\
&= \prod_{k=1}^{K}\Big[\prod_{t=1}^{T^k}\alpha_{\bar{m}_t^k}^{s_t^k}\sum_{l=s_{t-1}^k}^{s_t^k}\Big\{\prod_{i=s_{t-1}^k,\neq l}^{l-1}\frac{\theta_i^k}{\theta_i^k-\theta_l^k}\exp(-\theta_l^k\bar{z}_t^k)\Big\}\Big]
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

で表される．ただし，$\theta_i^k=\exp(\boldsymbol{x}^k\boldsymbol{\beta}_i')$ と表される．この尤度関数を用いて，未知パラメータベクトル $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{I-1})$，$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{I-1})$, 潜在変数ベクトル $\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{s}^1,\cdots,\boldsymbol{s}^K)$ を最尤推定する問題に帰着される．なお，パラメータベクトル $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ を与件とすれば，潜在変数 s_t^k $(t=1,\cdots,T^k;k=1,\cdots,K)$ の全条件付事後分布を求めることができる．ここで，$\boldsymbol{s}_{-t}^k=(s_1^k,\cdots,s_{t-1}^k,s_{t+1}^k,\cdots,s_{T^k}^k)$ とすれば，s_t^k $(s_t^k\in\{s_{t-1}^k,\cdots,s_{t+1}^k\})$ の全条件付事後確率は，

$$
\mathrm{Prob}\{s_t^k=i|\boldsymbol{s}_{-t}^k,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi}\}=\frac{\omega_{it}^k f_i(m_t^k|\boldsymbol{\alpha}_i)}{\sum_{j=s_{t-1}^k}^{s_{t+1}^k}\omega_{jt}^k f_j(m_t^k|\boldsymbol{\alpha}_j)}
\tag{4.28}
$$

と表される．ただし，

$$\omega_{jt}^k = \begin{cases} \pi_{1j}\pi_{js_2} & t=1 \\ \pi_{s_{t-1}^k j}\pi_{js_{t+1}^k} & 2 \leq t \leq T^k \\ \pi_{s_{T^k-1}^k j} & t = T_k \end{cases} \tag{4.29}$$

である．

4.5.3 ベイズ推計法

一般に，ベイズ推定法は，1) 事前の経験情報などに基づいて，パラメータ$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$の事前確率密度関数を設定する．2) 新しく獲得したデータ$\boldsymbol{\xi}$に基づいて尤度関数$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\bar{\boldsymbol{\xi}})$を定義する．さらに，3) ベイズの定理に基づいて事前確率密度関数を修正し，パラメータ$\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$に関する事後確率密度関数$\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\xi})$を得る，という手順を採用することになる．以上の手順を，本章ではベイズ推定ルールと呼ぶ．最尤法と異なり，未知パラメータ$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$の確率分布が，事後分布として求まる点にベイズ推定法の特徴がある．前述したように，ハザードモデルでは，共役事前確率密度関数を見出すことは不可能[58)]であり，事前確率密度関数は，非共役事前確率密度関数を採用せざるを得ない．事前確率密度関数設定には，任意性が介在せざるを得ないが，サンプル数が増加するにつれて事前確率密度関数の特定化の影響は次第に低下する．

まず，条件付システム誤差分布関数(4.25)に含まれるパラメータ$\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_1^i,\cdots,\alpha_i^i)$は，式(4.26a),(4.26b)を満足する定数である．これらの定数の事前確率密度関数として，ディリクレ分布を仮定しよう．すなわち，パラメータ$\boldsymbol{\alpha}_i$の事前確率密度関数を

$$\begin{aligned} \eta_i(\boldsymbol{\alpha}_i|\boldsymbol{\nu}^i) &= \Psi_i(\boldsymbol{\nu}^i)\prod_{m=1}^{i}(\alpha_m^i)^{\nu_m^i-1} \\ \Psi_i(\boldsymbol{\nu}^i) &= \frac{\Gamma(\nu_1^i+\cdots+\nu_i^i)}{\Gamma(\nu_1^i)\cdots\Gamma(\nu_i^i)} \\ \sum_{m=1}^{i}\alpha_m^i &= 1 \end{aligned} \tag{4.30}$$

と表現する．ただし，$\boldsymbol{\nu}^i = (\nu_1^i,\cdots,\nu_i^i)$は定数パラメータベクトルである．$\boldsymbol{\alpha}_i$がディリクレ分布に従う場合，これらのパラメータは自動的に式(4.26a),(4.26b)を満足することが保証される．つぎに，$\boldsymbol{\beta}_i$の事前確率密度関数が，標準的な事前確率密度関数として用いられる多次元正規分布に従うと仮定しよう．すなわち，$\boldsymbol{\beta}_i \sim \mathcal{N}_M(\boldsymbol{\zeta}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i)$である．ただし，$M$次元正規分布$\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\zeta}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i)$の確率密度関数は，

$$h(\boldsymbol{\beta}_i|\boldsymbol{\zeta}_i,\boldsymbol{\Sigma}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}}\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}_i|}}\cdot\exp\Big\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)\boldsymbol{\Sigma}_i{}^{-1}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)'\Big\} \tag{4.31}$$

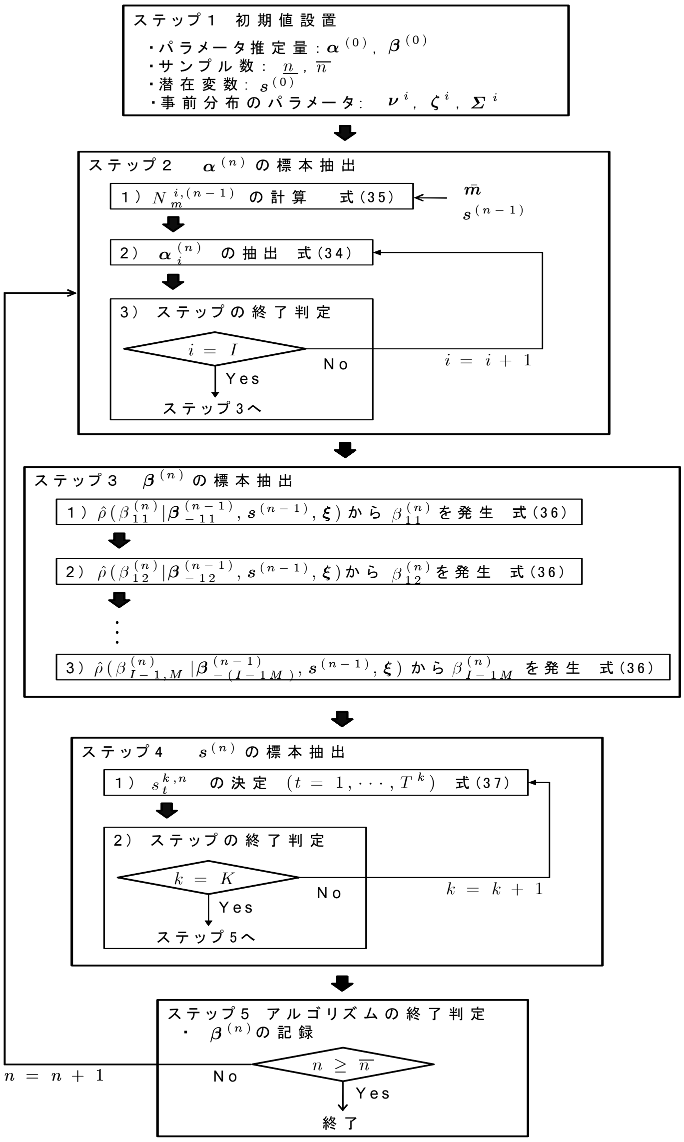


図 4-4　隠れマルコフ劣化モデルのベイズ推定法

となる．ただし，$\boldsymbol{\zeta}_i$は$\mathcal{N}_M(\boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i)$の事前期待値ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}_i$は事前分散共分散行列である．この時，完備化事後確率密度関数$\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\xi})$は，

$$
\begin{aligned}
&\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\xi}) \propto \tilde{\mathcal{L}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\xi}) \prod_{i=1}^{I-1} \Big\{ h(\boldsymbol{\beta}_i|\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i) \eta_i(\boldsymbol{\alpha}_i|\boldsymbol{\nu}^i) \Big\} \\
&\propto \prod_{k=1}^{K} \Bigg[\prod_{t=1}^{T^k} \sum_{l=s_{t-1}^k}^{s_t^k} \Big\{ \prod_{i=s_{t-1}^k, \neq l}^{l-1} \frac{\theta_i^k}{\theta_i^k - \theta_l^k} \exp(-\theta_l^k z_t^k) \Big\} \\
&\cdot \prod_{i=1}^{I-1} \exp\Big\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\zeta}_i) \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\boldsymbol{\beta}_i - \boldsymbol{\zeta}_i)' \Big\} \\
&\cdot \left(\prod_{t=1}^{T^k} \alpha_{\bar{m}_t^k}^{s_t^k} \right) \left(\prod_{i=1}^{I} \prod_{m=1}^{i} (\alpha_m^i)^{\nu_m^i - 1} \right) \Bigg]
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

となる．

4.5.4　ギブスサンプリング

隠れマルコフ劣化モデルでは，事後確率密度関数$\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\xi})$を直接解析的に求めることができない．そこで，代表的なMCMC法であるギブスサンプリング法[60)]を用いて，パラメータ$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$の標本サンプルを事後確率密度関数から抽出する．式(4.32)において，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$は互いに独立であり，これらのパラメータの完備化条件付事後密度関数$\rho(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{s},\boldsymbol{\xi})$，$\rho(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{s},\boldsymbol{\xi})$は

$$\rho(\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{s},\boldsymbol{\xi}) \propto \Big(\prod_{k=1}^{K}\prod_{t=1}^{T^k}\alpha_{\bar{m}_t^k}^{s_t^k}\Big)\Big\{\prod_{i=1}^{I}\prod_{m=1}^{i}(\alpha_m^i)^{\nu_m^i-1}\Big\} \tag{4.33a}$$

$$\rho(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{s},\boldsymbol{\xi}) \propto \Big\{\prod_{k=1}^{K}\Big[\prod_{t=1}^{T^k}\sum_{l=s_{t-1}^k}^{s_t^k}\Big[\prod_{i=s_{t-1}^k,\neq l}^{l-1}\frac{\theta_i^k}{\theta_i^k-\theta_l^k}\exp(-\theta_l^k z_t^k)\Big]\Big\}$$

$$\prod_{i=1}^{I-1}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)\boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)'\Big\} \tag{4.33b}$$

と表せる．また，潜在変数$\boldsymbol{s}$の全条件付事後分布は式(4.28)で表される．以上のギブスサンプラーを用いたMCMC法により，隠れマルコフ劣化モデルを推計することが可能となる．**図4-4**に，隠れマルコフ劣化モデルをベイズ推計するための具体的手順を整理している．読者の便宜を図るために，同図中には，推定法の詳細を説明する節番号や式番号を明記している．以下では，以上の各ステップの内容を，より詳細に説明する．

a）ステップ1　初期値設定

事前分布(4.30),(4.31)のパラメータベクトル（行列）$\boldsymbol{\nu}^i$ $(i = 1,\cdots,I)$，$\boldsymbol{\zeta}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i$ $(i = 1,\cdots,I-1)$の値を任意に設定する．潜在変数の初期値$\boldsymbol{s}^{(0)} = (\boldsymbol{s}^{(1,0)},\cdots,\boldsymbol{s}^{(K,0)})$を設定する．ただし，$\boldsymbol{s}^{(k,0)} = (s_1^{k,0},\cdots,s_T^{k,0})$であり，$1 \leq s_1^{k,0} \leq \cdots \leq s_T^{k,0} \leq I$を満足する．さらに，パラメータ推定量の初期値$\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$，$\boldsymbol{\beta}^{(0)}$を任意に設定する．これらの初期値の影響は，MCMC法によるシミュレーション回数が蓄積されるにつれ，次第に薄れていく．MCMCのサンプル標本回数nを$n=1$とする．

b）ステップ2　パラメータ$\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$の標本抽出

ステップ2では，潜在変数$\boldsymbol{s}^{(n-1)}$を与件として，条件付システム誤差分布のパラメータ$\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = (\boldsymbol{\alpha}_1^{(n)},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{I-1}^{(n)})$に関するパラメータ標本を獲得する．ただし，$\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)} = (\alpha_m^{i,n} : m = 1,\cdots,i)$と表記する．**ステップ2**で用いるギブスサンプラーは式(4.33a)で表される完備化条件付事後密度関数$\rho(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}|\boldsymbol{s}^{(n-1)},\boldsymbol{\xi})$で与えられる．真の健全度$\boldsymbol{s}^{(n-1)}$と測定データ$\boldsymbol{\xi}$を与件としたとき，完備化された$\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)}$に関するギブスサンプラーを

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)}|\boldsymbol{s}^{(n-1)},\boldsymbol{\xi}) \propto \left\{\prod_{k=1}^{K}\prod_{t=1}^{T^k}\alpha_{\bar{m}_t^k}^{s_t^{k,(n-1)}}\right\}\left\{\prod_{m=1}^{i}(\alpha_m^{i,n})^{\nu_m^i-1}\right\}$$

$$= \prod_{m=1}^{i}(\alpha_m^{i,n})^{\nu_m^i+N_m^{i,(n-1)}-1} \tag{4.34}$$

と表すことができる．ただし，$N_m^{i,(n-1)}$は見かけの健全度の測定値$\bar{\boldsymbol{m}}$と潜在変数$\boldsymbol{s}^{(n-1)}$を与件とした時，

$$N_m^{i,(n-1)} = \#\Big\{\bar{m}_t^k = m \cap s_t^{k,(n-1)} = i\Big\} \tag{4.35}$$

と定義される．ただし，#{ }は，括弧{ }内に含まれる定義式が成立するような測定サンプル数を表す．式(4.34)は，パラメータ$\nu_m^i + N_m^{i,(n-1)} - 1$を有するディリクレ分布に他ならない．更新されたディリクレ分布(4.34)を用いて，ギブスサンプリングにより，条件付システム誤差分布のパラメータ標本$\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)} = (\alpha_1^{i,(n)}, \cdots, \alpha_i^{i,(n)})$を標本抽出する．すべての$i$ $(i=1,\cdots,I)$に対してパラメータ標本$\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)}$を求める．

c）ステップ3　パラメータ$\boldsymbol{\beta}^{(n)}$の標本抽出

ステップ3では，真の健全度で定義される多段階指数ハザードモデルのパラメータ標本を抽出する．**ステップ3**のアルゴリズムを説明するために，$\boldsymbol{\beta}$からβ_{em}を除いた未知パラメータベクトルを$\boldsymbol{\beta}_{-em}$と表そう．この時，式(4.33b)より，$\boldsymbol{\beta}_{-em}$を既知とした時のβ_{em}の条件付き事後確率密度関数$\rho(\beta_{em}|\boldsymbol{\beta}_{-em},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\xi})$は

$$\begin{aligned}
&\hat{\rho}(\beta_{em}|\boldsymbol{\beta}_{-em},\boldsymbol{s},\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad\propto \prod_{i=1}^{e}\prod_{j=e}^{I}\prod_{k=1}^{K}\prod_{t=1}^{T^k}\Big\{\prod_{l=i}^{j-1}(\theta_l^k)^{\delta_{ij}^{tk}-\delta_{ie}^{tk}}\sum_{h=i}^{j}\cdot\prod_{l=i,\neq h}^{h-1}\frac{1}{\theta_l^k-\theta_h^k}\exp(-\theta_h^k z_t^k)\Big\}^{\delta_{ij}^{tk}} \\
&\quad\cdot\prod_{i=1}^{I-1}\exp\Big\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)\boldsymbol{\Sigma}_i{}^{-1}(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\zeta}_i)'\Big\}\Big] \\
&\quad\propto \prod_{i=1}^{e}\prod_{j=e}^{I}\prod_{k=1}^{K}\prod_{t=1}^{T^k}\Big[\prod_{l=i}^{j-1}\{\exp(\beta_{em}x_m^k)\}^{\delta_{ij}^{tk}-\delta_{ie}^{tk}} \\
&\quad\cdot\sum_{h=i}^{j}\prod_{l=i,\neq h}^{h-1}\frac{1}{\theta_l^k-\theta_h^k}\exp(-\theta_h^k z_t^k)\Big]^{\delta_{ij}^{tk}}\exp\Big\{-\frac{\sigma_e^{mm}}{2}(\beta_{em}-\hat{\zeta}_e^m)^2\Big\} \\
&\qquad\hat{\zeta}_e^m = \zeta_e^m + \sum_{h=1,\neq m}^{M}(\beta_{eh}-\zeta_e^h)\sigma_e^{hm}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

と表せる．ただし，δ_{ie}^{tk}，δ_{ij}^{tk}は

$$\delta_{ie}^{tk} = \begin{cases} 1 & s_{t-1}^k = i = e\,\text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}$$

$$\delta_{ij}^{tk} = \begin{cases} 1 & s_{t-1}^k = i,\ s_t^k = j\,\text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時}\end{cases}$$

となるダミー変数である．ζ_e^mは事前期待値ベクトル$\boldsymbol{\zeta}_e$の第m要素であり，σ_e^{hm}は事前分散共分散行列$\boldsymbol{\Sigma}_e{}^{-1}$の第$(h,m)$要素である．また，$\sum_{h=1,\neq m}^{M}$は1から$M$までの要素のうち$m$

を除いた要素の総和を意味する．これらの条件付き確率密度関数から標本を発生させ，その標本を用いてパラメータ$\boldsymbol{\beta}$の事後分布に関する各種の統計量を計算することができる．MCMC法から得られた標本を用いて，事後分布の各種統計量を求める方法については，**4.5.5**で述べる．このとき，$\boldsymbol{\beta}^{(n)} = (\beta_{11}^{(n)}, \cdots, \beta_{I-1M}^{(n)})$を以下の手順でランダムサンプリングする．

- **ステップ3-1**　$\hat{\rho}(\beta_{11}^{(n)}|\boldsymbol{\beta}_{-11}^{(n-1)}, \boldsymbol{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$から$\beta_{11}^{(n)}$を乱数発生する．
- **ステップ3-2**　$\hat{\rho}(\beta_{12}^{(n)}|\boldsymbol{\beta}_{-12}^{(n-1)}, \boldsymbol{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$から$\beta_{12}^{(n)}$を乱数発生する．
- **ステップ3-3**　以下，同様の手順を繰り返す．
- **ステップ3-4**　$\hat{\rho}(\beta_{I-1,M}^{(n)}|\boldsymbol{\beta}_{-(I-1M)}^{(n-1)}, \boldsymbol{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$から$\beta_{I-1M}^{(n)}$を乱数発生する．

なお，ギブスサンプリングを行うためには$(I-1)\times M$個の条件付き事後確率密度関数$\hat{\rho}(\beta_{em}^{(n)}|\boldsymbol{\beta}_{-em}^{(n-1)}, \boldsymbol{s}^{(n-1)}, \boldsymbol{\xi})$を求めることが必要となる．本章では，式(4.36)から事後分布のパラメータ$\boldsymbol{\beta}$の標本をサンプリングする手法として，適応的棄却サンプリング[61)]を用いる．

d) ステップ4　潜在変数の更新

全条件付事後確率(4.28)に基づいて，新しい潜在変数$\boldsymbol{s}^{(n)}$をランダムサンプリングする．いま，潜在変数ベクトル$\boldsymbol{s}_{-t}^{k,(n-1)} = (s_1^{k,n}, \cdots, s_{t-1}^{k,n}, s_{t+1}^{k,(n-1)}, \cdots, s_{T^k}^{k,(n-1)})$を定義する．この時，$s_t^{k,n}$ $(s_t^{k,n} \in \{s_{t-1}^{k,n}, \cdots, s_{t+1}^{k,(n-1)}\})$の全条件付事後確率は，

$$\mathrm{Prob}\{s_t^k = i|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{s}_{-t}^{k,(n-1)}, \boldsymbol{\xi}\} = \begin{cases} \dfrac{\omega_{it}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k|\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)})}{\sum_{j=1}^{s_2^{k,(n-1)}} \omega_{jt}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k|\boldsymbol{\alpha}_j^{(n)})} \\ \qquad (t=1\text{の時}) \\ \dfrac{\omega_{it}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k|\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)})}{\sum_{j=s_{t-1}^{k,n}}^{s_{t+1}^{k,(n-1)}} \omega_{jt}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k|\boldsymbol{\alpha}_j^{(n)})} \\ \qquad (2 \le t < T^k\text{の時}) \\ \dfrac{\omega_{it}^{k,(n-1)} f_i(m_t^k|\boldsymbol{\alpha}_i^{(n)})}{\sum_{j=s_{t-1}^{k,n}}^{I} \omega_{jt}^{k,(n-1)} f_j(m_t^k|\boldsymbol{\alpha}_j^{(n)})} \\ \qquad (t=T^k\text{の時}) \end{cases} \tag{4.37}$$

と表される．ただし，

$$\omega_{jt}^{k,(n-1)} = \begin{cases} \pi_{1j}\pi_{js_2^{k,(n-1)}} & t=1 \\ \pi_{s_{t-1}^{k,n}j}\pi_{js_{t+1}^{k,(n-1)}} & 2 \le t < T^k \\ \pi_{s_{T^k-1}^{k,n}j} & t = T_k \end{cases} \tag{4.38}$$

である．すべてのk $(k=1,\cdots,K)$に対して，$t=1$より逐次，潜在変数$s_t^{k,n}$ $(t=1,\cdots,T^k)$を求める．

e）ステップ５　アルゴリズムの終了判定

以上で求めたパラメータ推定量の更新値$\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$,$\boldsymbol{\beta}^{(n)}$，潜在変数の更新値$\boldsymbol{s}^{(n)}$を記録する．$n \leq \overline{n}$の場合，$n = n + 1$として，**ステップ２**へ戻る．そうでない場合，アルゴリズムを終了する．

なお，以上のアルゴリズムの初期段階においては，パラメータの初期値設定の影響が残存している．このため，シミュレーション回数nが十分大きな$\underline{n}$の到達するまでのパラメータ標本を除去することが望ましい．このため，ギブスサンプリングで求めた$\boldsymbol{\alpha}^{(n)}, \boldsymbol{\beta}^{(n)}$ $(n = \underline{n}+1, \underline{n}+2, \cdots, \overline{n})$を，事後確率密度関数$\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\xi})$からの標本と見なすことができる．したがって，これらの標本を用いて，パラメータベクトル$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$の事後分布に関する各種の統計量を計算することも可能となる．

4.5.5　事後分布に関する統計量

MCMC 法によって得られた標本に基づいて，パラメータベクトル$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$に関する統計的性質を分析することができる．MCMC 法を用いた場合，パラメータの事後確率密度関数$\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{\xi})$を解析的な関数として表現することはできない．得られた標本を用いてノンパラメトリックに分布関数や密度関数を推定することとなる．いま，ギブスサンプリングから得られた標本を$(\boldsymbol{\alpha}^{(n)}, \boldsymbol{\beta}^{(n)})$ $(n = 1, \cdots, \overline{n})$と表そう．この内，最初の$\underline{n}$個の標本は収束過程からの標本と考え，標本集合から除去する．その上で，パラメータの標本添字集合を$\mathcal{M} = \{\underline{n}+1, \cdots, \overline{n})$と定義しよう．このとき，パラメータ$\boldsymbol{\alpha}$及び$\boldsymbol{\beta}$の同時確率分布関数$G(\boldsymbol{\alpha}), G(\boldsymbol{\beta})$は

$$G(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\#(\boldsymbol{\alpha}(n) \leq \boldsymbol{\alpha}, n \in \mathcal{M})}{\overline{n} - \underline{n}} \tag{4.39a}$$

$$G(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\#(\boldsymbol{\beta}(n) \leq \boldsymbol{\beta}, n \in \mathcal{M})}{\overline{n} - \underline{n}} \tag{4.39b}$$

と表すことができる．ただし，$\#(\boldsymbol{\beta}(n) \leq \boldsymbol{\beta}, n \in \mathcal{M})$は論理式$\boldsymbol{\beta}(n) \leq \boldsymbol{\beta}, n \in \mathcal{M}$が成立するサンプルの総数である．また，パラメータ$\boldsymbol{\beta}_i$の事後分布の期待値ベクトル$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_i(\boldsymbol{\beta}_i)$，分散・共分散行列$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i(\boldsymbol{\beta}_i)$は，それぞれ

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_i(\boldsymbol{\beta}_i) &= (\tilde{\zeta}(\beta_{i,1}), \cdots, \tilde{\zeta}(\beta_{i,M}))' \\ &= \Big(\sum_{n=\underline{n}+1}^{\overline{n}} \frac{\beta_{i,1}(n)}{\overline{n}-\underline{n}}, \cdots, \sum_{n=\underline{n}+1}^{\overline{n}} \frac{\beta_{i,M}(n)}{\overline{n}-\underline{n}}\Big)'\end{aligned} \tag{4.40a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i(\boldsymbol{\beta}_i) = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^2(\beta_{i,1}) & \cdots & \tilde{\sigma}(\beta_{i,1}\beta_{i,M}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\sigma}(\beta_{i,M}\beta_{i,1}) & \cdots & \tilde{\sigma}^2(\beta_{i,M}) \end{pmatrix} \tag{4.40b}$$

と表される．ただし，

$$\tilde{\sigma}^2(\beta_{i,m}) = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\overline{n}} \frac{\{\beta_{i,m}(n) - \tilde{\zeta}(\beta_{i,m})\}^2}{\overline{n} - \underline{n}} \tag{4.41a}$$

$$\tilde{\sigma}(\beta_{i,m}\beta_{i,l}) = \sum_{n=\underline{n}+1}^{\overline{n}} \frac{\{\beta_{i,m}(n) - \tilde{\zeta}(\beta_{i,m})\}\{\beta_{i,l}(n) - \tilde{\zeta}(\beta_{i,l})\}}{\overline{n} - \underline{n}} \tag{4.41b}$$

である．また，ギブスサンプリングによる標本を用いて，パラメータ$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$の信頼区間を定義できる．たとえば，パラメータ$\boldsymbol{\beta}$の$100(1-2\varepsilon)\%$ 信頼区間は，標本順序統計量$(\underline{\beta}^{\varepsilon}_{i,m}, \overline{\beta}^{\varepsilon}_{i,m})$ $(i=1,\cdots,I-1, \quad m=1,\cdots,M)$

$$\underline{\beta}^{\varepsilon}_{i,m} = \arg\max_{\beta_{i,m}(n^*)} \left\{ \frac{\#(\beta_{i,m}(n) \leq \beta_{i,m}(n^*), n \in \mathcal{M})}{\overline{n} - \underline{n}} \leq \varepsilon \right\} \tag{4.42a}$$

$$\overline{\beta}^{\varepsilon}_{i,m} = \arg\min_{\beta_{i,m}(n^{**})} \left\{ \frac{\#(\beta_{i,m}(n) \geq \beta_{i,m}(n^{**}), n \in \mathcal{M})}{\overline{n} - \underline{n}} \leq \varepsilon \right\} \tag{4.42b}$$

を用いて$\underline{\beta}^{\varepsilon}_{i,m} < \beta_{i,m} < \overline{\beta}^{\varepsilon}_{i,m}$と定義できる．

4.6 適用事例

4.6.1 データベースの概要

本研究で提案した隠れマルコフ劣化モデルを，M県が管理する一般国道において過去9年間に実施された路面性状調査結果に適用し，道路舗装のわだち掘れ劣化予測を試みる．対象とするデータベースは，補修年度に関するデータと，路面性状の実測データにより構成されている．路面性状調査は，3年もしくは6年間隔で行われている．分析対象とする区間は，M県に存在する一般国道のうち，M県が管理する約60kmの区間であり，100mを単位区間として測定サンプルが蓄積されている．また，1986年以降，現在に至るまで，高速測定車両による舗装のわだち掘れ測定を定期的に実施している．本研究の適用事例で用いる管理データベースでは，1998年から2005年に至る期間中に実施された路面性状調査データが記載されている．これらのデータの中で，適用事例では，アスファルト舗装のわだち掘れ過程に着目する．さらに，補修履歴データベースには，分析対象期間中に実施された道路舗装の補修に関する記録が蓄積されている．対象期間中に道路舗装の補修が実施された路面箇所に関しては，その時点を初期時点とするサンプル時間軸を定義し，隠れマルコフ劣化ハザードモデル推定のためのデータベースを作成した．したがって，測定サンプルは，初期時点とそれ以降の連続する2つの測定時点におけるわだち掘れ量の実測値，および測定間隔に関する情報により構成されている．データベースには，個々の測定サンプルに関わる交通情報や，道路条件も記載されている．このようにして作成した測定サンプル数は，合計5,261個である．

表 4-1　健全度レーティング

ランク	わだち掘れ量
1	5mm 未満
2	5mm 以上 10 未満
3	10mm 以上 15mm 未満
4	15mm 以上 20mm 未満
5	20mm 以上

表 4-2　サンプル数

事前	事後健全度				
健全度	1	2	3	4	5
1	331	339	32	5	0
2	573	1919	468	187	47
3	66	240	382	163	44
4	50	63	52	82	67
5	2	22	16	27	84

舗装のわだち掘れ量の実測データは連続値として記録されている．本研究で提案した劣化予測モデルを推定するためには，わだち掘れ量の連続値を離散的な健全度に置き換える必要がある．本研究では，わだち掘れに関する健全度を，**表 4-1** に示すような，5 段階のレーティングに分類した． いま，連続する 2 つの時点における健全度の実測値を，事前健全度，事後健全度と呼ぶこととする．多段階指数ハザードに用いる測定サンプルを，事前健全度と事後健全度に着目して整理した結果を**表 4-2** に示している．同表の各行は，事前健全度 i に，各列は事後健全度 j に対応している．ここでは，2 つの測定時点の間に，舗装の補修が実施されていないサンプルのみを抽出している．しかし，同表に示すように，事前健全度に対して，事後健全度が回復しているサンプルが多数存在している．特に，事前健全度が 2 の場合に事後健全度が 1 となるサンプルが多い．2 つの時点間において，道路舗装の補修が実施されていないことを考慮すれば，分析で用いるデータには，数多くのシステム的誤差が介在していることが理解できる．

4.6.2　推計結果

以上のデータベースを用いて，舗装わだち掘れ量の劣化予測モデルを推定した．推定にあたっては，道路特性を表す説明変数として，車線区分，大型車交通量，構造特性等を説明変数の候補としてとりあげた．これらの説明変数のうち，大型車交通量 x_{i2} のみが，最終的に有意な説明力を有する変数として採用された．なお，説明変数 x_{i2} は大型自動車交通量について区間内での最大値を 1 として基準化したものである．大型車交通量以外の変数は，有意な説明力を持たないため，説明変数として選ばれていない．本研究では，M 県

表 4-3　パラメータの推計結果

健全度	定数項 β_{i1}	交通量 β_{i2}
1	0.279	0.418
	-	(16.135)
2	0.033	0.187
	-	(223.255)
3	0.107	-
	-	-
4	0.112	-
	-	-

注) 括弧内は尤度比検定統計量を表している．また，損傷度5はマルコフ連鎖の吸収状態であり，ハザード率が0となる．

の国道という単一の路線を対象としたわだち掘れ予測モデルを推計している．このため，舗装材料，施工時期等の説明変数は，モデル推計に用いる各サンプルを通じて同一の値をとっている．このため，これらの舗装特性は，モデルの説明変数として選ばれていない．当然のことながら，推計したわだち掘れ予測モデルは，分析対象とした一般国道にのみ適用可能であることは言うまでもない．今後，環境条件が異なる多数の路線にも適用可能なわだち掘れ予測モデルを開発するためには，本適用事例で採択されなかった変数を説明変数に加えたモデルを開発することが必要となる．

以上のデータに基づいて推定した隠れマルコフ劣化モデルのパラメータ推計値を，一括して**表 4-3** に示している．ここで，説明変数 $x_{i1}=1$ は恒常的に値 1 をとり，β_{i1} は定数項を表す．本研究では，説明変数の選定に際して，各説明変数の説明力を尤度比検定統計量を用いて評価した．本来，尤度比検定は最尤推計法において用いられる検定法であるが，本研究では MCMC 法で発生したパラメータサンプルそれぞれに対して尤度を求めるとともに，その平均値を用いて尤度比検定を実施した．**表 4-3** には，モデルの推計精度を表す尤度比を併記している．尤度比検定の結果，本適用事例では，x_{i1}，x_{i2} が説明変数として採用されている．同表に示すように，大型車交通量は，道路舗装のわだち掘れの発生と初期段階の進行に多大な影響を及ぼす．しかし，わだち掘れが進行した段階では，大型車交通量と関係なくわだち掘れが進行することがわかる．つぎに，推計したシステム誤差分布を**図 4-5** に示している．同図は，真の健全度に対する見かけの健全度の確率分布 $f_i(m|\boldsymbol{\alpha}_i)$ を示している．同図より，以下の事項が読み取れる．すなわち，真の健全度と見かけの健全度が一致する確率がもっとも大きい．健全度 4，5 の場合，システム的誤差の影響により，見かけの健全度が広範囲に分散していることが理解できる．

つぎに，推計されたパラメータを用いて，式 (4.11) より各劣化状態のハザード率の期待値と期待寿命を算出した．その結果を，**表 4-4** に示している．同表より，平均的なわだち

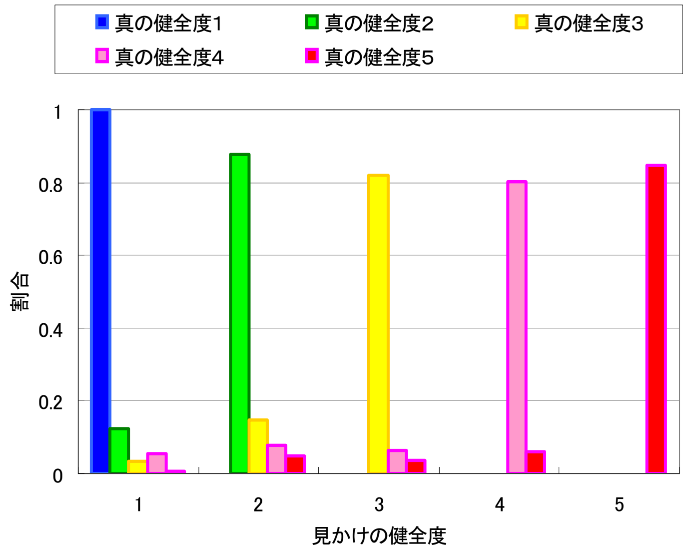


図 4-5 システム誤差分布

表 4-4　レーティング期待寿命

劣化状態	$E[\theta_{il}]$	$E[RMD_{il}^{k}]$(年)
1	0.362	2.763
2	0.070	14.225
3	0.107	9.305
4	0.112	8.951

注) 損傷度5はマルコフ連鎖の吸収状態であり，ハザード率，期待寿命は定義されない．

掘れの進行過程は，初期時点から3年未満の早期段階で健全度2に推移し，その後は10年から15年程度の間隔で，健全度が低下していく．

4.6.3　分析結果の考察

隠れマルコフ劣化モデルを用いて，マルコフ推移確率行列を求めよう．本研究で提案したハザードモデルは，説明変数の組み合わせごとにハザード率を定義することができる．言い換えれば，道路特性，車線特性別のマルコフ推移確率を推計することができる．ここでは，すべての道路区間にわたってハザード率を平均化したような平均的なハザード率を用いてマルコフ推移確率を求めた．その結果を**表 4-5**に示している．ただし，マルコフ推移確率行列は，1年間隔で定義されている．つぎに，式(4.13)を用いて，供用性曲線を求めた．その結果を**図 4-6**に示す．同図には，対象区間全体の平均ハザード率を用いた供用性曲線(BMケースと呼ぶ)を示している．さらに，大型車交通量がひび割れ進行に及ぼす影響を分析するために，観測された最大交通量と最小交通量を用いてハザード率を算出し，それぞれのハザード率に対応する供用性曲線を求めた結果も併記している．同図から，健全度2から健全度3の推移において，大型車交通量の影響が大きいことがわかる．具体的には，健全度2の平均寿命は，交通量最大区間では約4.5年であるのに対して，交通量最

表 4-5 推移確率行列 (隠れマルコフ劣化モデル)

事前 健全度	事後健全度 1	2	3	4	5
1	0.696	0.293	0.011	0.000	0.000
2	0.0	0.932	0.064	0.003	0.000
3	0.0	0.0	0.898	0.096	0.006
4	0.0	0.0	0.0	0.894	0.106
5	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

注) 推移行列は，1年間の間に生起する状態推移確率を示している．ここでは，平均操作を行い，当該路線の平均的なひび割れ発生，推移確率を求めたものである．

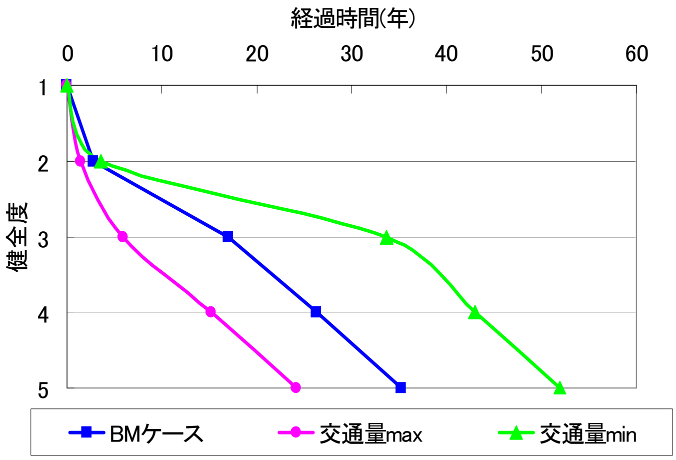


図 4-6 供用性曲線

小区間では約30年となっている．ただし，前述したように，交通量の影響は供用開始時点から健全度3に至る過程にしか及ばず，健全度3以降では交通量に関わらず同じ速度で劣化する結果となっている．

4.6.4　システム誤差と推計バイアス

システム的誤差の存在が，多段階指数劣化ハザードモデルの推計結果に及ぼす影響を分析する．いま，**図 4-1** に示すようなデータに対して45度線より上方に位置する（事後健全度が事前健全度より改善した）サンプルのみを除去して，多段階指数ハザードモデルのベイズ推計を試みた．多段階指数ハザードモデルのベイズ推計法の詳細は参考文献に譲る．このように，事後健全度が改善したサンプルを除去して作成したデータベース（以下，切断データベースと呼ぶ）に基づいて，多段階指数劣化ハザードモデルを用いて推計した結果を**表 4-6** に示している．さらに，平均的ハザード率を用いて作成したマルコフ推移確率

表 4-6　切断データベースを用いた推計結果

健全度	定数項 β_{i1}	交通量 β_{i2}
1	0.242	0.350
	-	(65.412)
2	0.040	0.196
	-	(183.223)
3	0.139	-
	-	-
4	0.163	-
	-	-

注) 括弧内は尤度比検定統計量を表している. また，損傷度5はマルコフ連鎖の吸収状態であり，ハザード率が0となる．同表では，吸収状態のハザード率を記述していない.

表 4-7　推移確率行列 (多段階指数劣化ハザードモデル)

事前	事後健全度				
健全度	1	2	3	4	5
1	0.728	0.261	0.010	0.000	0.000
2	0.0	0.927	0.068	0.005	0.000
3	0.0	0.0	0.869	0.121	0.010
4	0.0	0.0	0.0	0.850	0.150
5	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

注) 推移行列は，1年間の間に生起する状態推移確率を示している．ここでは，平均操作を行い，当該路線の平均的なひび割れ発生，推移確率を求めたものである．なお，多段階指数ハザードモデルの推計には，健全度が回復しているサンプルを用いていない点に留意されたい.

を**表 4-7**に示している．隠れマルコフ劣化モデルを用いて作成したマルコフ推移確率（**表 4-5**）と，切断データベースを用いて推定したマルコフ推移確率（**表 4-7**）を比較しよう．2つの表を比較すれば，健全度1の場合を除いて，その他の健全度では隠れマルコフ劣化モデルを用いた方が，同一健全度にとどまる確率が大きくなっている．**図 4-7**には，平均ハザード率を用いて作成した供用性曲線を示している．マルコフ推移確率の比較結果からも類推できるように，切断データベースを用いた場合，劣化速度を過大に評価する危険性が存在することが理解できる．このことは，事前健全度と事後健全度が逆転するようなサンプルにおいては，真の事後健全度が真の事前健全度より，劣化がそれほど進展していない可能性が大きいことを意味している．したがって，切断データベースを用いた場合，2つの測定時点の間で劣化の進展が遅いサンプルが，データベースから除去される可能性

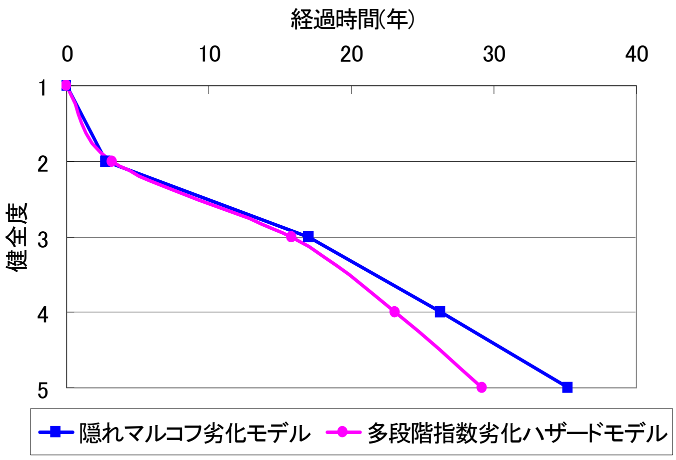


図 4-7 供用性曲線

がある．その結果，切断データベースを用いて劣化予測を行った場合，舗装の劣化速度を過大に評価する可能性がある．しかし，適用事例に関する限り，健全度3に至るまでの供用性曲線に関しては，切断データベースを用いて推計した供用性曲線とシステム的誤差を考慮した供用性曲線の間に大きな差異はない．劣化が進行した段階においては，劣化速度の過大推計の程度が大きくなる．しかし，健全度が進行した段階では，道路舗装が補修されることによるサンプル欠損バイアスが発生するため，そもそも供用性曲線の推計精度自体に問題が発生する可能性が存在する．舗装劣化予測の実務において，かねてより路面性状調査結果のシステム的誤差の存在が指摘されてきた．現実の劣化予測においては，2つの測定時点において健全度が改善されるようなデータを除去したような切断データベースを作成し，供用性曲線が作成されてきた．本適用事例に関する限り，健全度3程度の比較的わだち掘れが軽微な段階では，切断データベースを用いて，多段階指数劣化ハザードモデルと供用性曲線の推計を行っても，実務上大きな支障はないように思える．しかし，このことは本適用事例にのみ成立する事項であり，システム的誤差の存在が舗装劣化予測に及ぼす影響に関して，今後経験的な知見を増やす努力が必要である．

4.6.5　シミュレーションによる再現性の検証

隠れマルコフ劣化モデルは，見かけの健全度データを用いて，真の健全度の間に成立する推移関係を推計することを目的とする．モデルの推計に用いる健全度にシステム的誤差が存在しているため，実測値を用いて隠れマルコフ劣化モデルの推計精度を直接検討することができない．そこで，本節では，モンテカルロシミュレーションにより人為的に作成したデータベースを用いて，隠れマルコフ劣化モデルの現象再現能力について分析することとする．

表 4-8　ハザードモデルの再現結果

	ケース A		ケース B	
健全度	定数項	交通量	定数項	交通量
	β_{i1}	β_{i2}	β_{i1}	β_{i2}
1	0.238	0.337	0.294	0.342
	-	(57.892)	-	(48.393)
2	0.040	0.159	0.049	0.206
	-	(143.339)	-	(158.431)
3	0.105	-	0.126	-
	-	-	-	-
4	0.112	-	0.120	-
	-	-	-	-

注) 括弧内は尤度比検定統計量を表している．また，損傷度 5 はマルコフ連鎖の吸収状態であり，ハザード率が 0 となる．

いま，**表 4-5** に示す多段階指数劣化ハザードモデルが，真のモデルであると仮定しよう．隠れマルコフ劣化モデルの推計で用いたデータベースの各サンプルに対して，説明変数（大型車交通量）を入力変数として，**表 4-5** に示す多段階指数劣化ハザードモデルを用いれば，式 (4.8),(4.9) より各サンプルに対してマルコフ推移確率$\pi_{ij}(z)$を求めることができる．サンプル k $(k=1,\cdots,K)$ に対して，時点τ_t^k $(t=1,\cdots,T)$ で測定した時に得られる仮想的な健全度を，以下の手順で作成した．すなわち，１）初期時点から時点τ_1^kの推移確率$\pi_{1j}(z_1^k)$を用いて，時点τ_i^kにおける真の健全度$\hat{h}(\tau_1^k)=\hat{i}$をランダムに発生する．ただし，$z_1^k$は，初期時点から時点 $t=1$ までの時間間隔である．２）真の健全度$\hat{h}(\tau_1^k)=\hat{i}$に対して，推移確率$\pi_{\hat{i}j}(z_2^k)$を用いて，真の健全度$\hat{h}(\tau_2^k)=\hat{j}$をランダムに発生する．以下，同様の手順により，真の健全度$\hat{h}(\tau_T^k)$までランダムに発生する．３）システム誤差分布（**図 4-5** 参照）を用いて，真の健全度$\hat{h}(\tau_t^k)$ $(t=1,\cdots,T)$ に対して，見かけの健全度$\hat{m}(\tau_t^k)$をランダムに発生する．このようにして作成した人工的なデータベースを人為データベースと呼ぶ．さらに，人為データベースに対して，事後健全度 $m(\tau_t^k)$ $(t=1,\cdots,T)$ が事前健全度 $m(\tau_{t-1}^k)$ より改善しているようなサンプルを除去した人為切断データベースを作成する．

以上のように作成した人為データベースを用いて，隠れマルコフ劣化モデルによりハザードモデルを推計した（ケース A）．さらに，人為切断データベースを用いて，多段階指数劣化ハザードモデルを用いて，ハザードモデルを推計した（ケース B）．以上の推計結果を**表 4-8** に併記している．さらに，**図 4-8** には，ケース A とケー B のそれぞれのケースに対して，供用性曲線を作成した結果を示している．**表 4-5** と**表 4-8** を比較することにより，隠れマルコフ劣化モデルを用いることにより，システム誤差の影響を排除して，真のマルコフ劣化ハザードモデルを再現することに成功していることが理解できる．その結果，**図 4-8** に示すように，隠れマルコフ劣化モデルを用いて，真の供用性曲線をほぼ再現でき

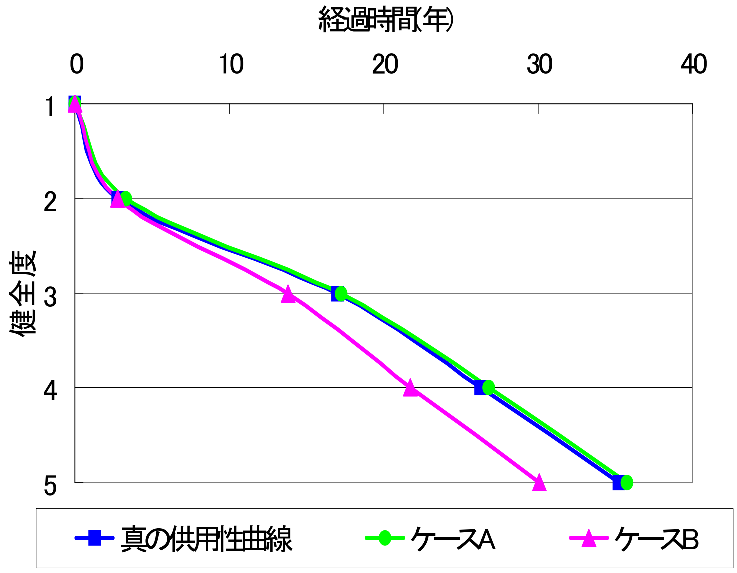


図 4-8 供用性曲線の再現結果

ていると判断できよう．しかし，人為切断データベースを用いて多段階段階指数ハザードモデルを推計した場合，前述したように劣化速度を過大評価されることが，**図 4-8** からも読み取れる．

4.7　結言

本章では，土木施設の劣化過程をマルコフ劣化モデルとして表現するとともに，健全度の測定結果に誤差が発生するメカニズムを隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現できることを示した．その際，測定誤差として代表値問題により発生するシステム誤差に着目した．さらに，システム誤差が介在するような見かけの健全度に関する測定データに基づいて，真の健全度により定義されるマルコフ劣化モデルを，マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーションによりベイズ推計する方法論を提案した．さらに，道路舗装を対象とした実証分析の結果，路面性状調査により測定される道路舗装の劣化情報に無視できないシステム的誤差が存在することを明らかにした．その上で，隠れマルコフ劣化モデルを用いて，システム誤差の背後に存在する劣化過程をマルコフ劣化モデルとして効果的に表現できることが明らかになった．しかし，本章で提案した隠れマルコフ劣化モデルに関して，今後に残された研究課題がある．第 1 に，本章で提案した隠れマルコフ劣化モデルは，道路舗装以外にも多様なタイプの土木施設の劣化予測に適用することが可能である．ただし，土木施設によりシステム誤差の発生メカニズムは多様に異なることが予想される．システム誤差の発生過程に関しては，システム誤差関数の特定化を含めて，今後の実証分析の蓄積が不可欠である．さらに，システム誤差の発生を可能な限り抑制しうるような測定方法に関する分析が必要である．第 2 に，劣化予測モデルに介在するシステム的誤差が発生する背景として，本章で取り上げた代表値問題以外にも，多様な要因が考えられる．測定機器や

測定時刻に固有なシステム的な測定バイアスも存在する．それ以外にも，初期時刻における更新・補修方法が，その後の劣化過程に及ぼす影響も無視できない．このような初期時刻の施工方法が劣化速度に及ぼす影響を分析するためには，ハザード率が確率変動するような混合ハザードモデルを開発することによりアプローチが可能である．第3に，M県の一般国道を対象とした実証分析では，劣化が進行するほど，切断データベースを用いた場合に，劣化速度の過大推計の程度が大きくなる．しかし，わだち掘れが軽微な段階では，切断データベースを用いても，システム的誤差による推計バイアスはそれほど大きいものではないことが判明した．しかし，このことは適用事例についてのみ成立する事項であり，今後実証分析を蓄積することにより，システム的誤差が舗装劣化予測に及ぼす影響に関する経験的知見を蓄積することが必要である．

5　結論

5.1　本研究の成果

本研究では，道路舗装のひび割れ過程に着目し，その劣化過程の多様性を階層的ネットワーク構造によって表現し，劣化予測モデルを提案した．特に，目視検査から得られる情報をもとに，劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化することを目的とした，統計的劣化予測モデルに焦点を絞った．本研究の統計的劣化予測モデルの特徴として，多段階モデルを拡張して階層型モデル・競合的モデルを提案したこと，土木施設の構造特性や使用環境といったミクロ情報，検査間隔の異質性を反映できること，および隠れマルコフモデルを利用し測定誤差を含むデータからもモデルが推定可能であることの3点が挙げられる．**2章**では，道路舗装のひび割れによる劣化状態を，損傷度とひび割れ形態という2つの状態変数で表現した．その上で，劣化状態間の推移確率を階層型指数劣化ハザードモデルで表現するとともに，ひび割れの進行状況を階層的ネットワーク特性を有するマルコフ過程として記述する方法を提案した．さらに，道路舗装のひび割れに関する定期測定結果に基づいて，ハザードモデルを推計し，道路の構造特性，舗装特性，および交通条件が道路舗装のひび割れ過程に及ぼす影響について分析した．さらに，東関東自動車道におけるひび割れに関する測定結果に基づいて，ひび割れ進行過程に関する実証的な知見を得た．**3章**では，道路舗装のひび割れによる劣化状態を，ひび割れタイプと損傷度という2つの状態変数で表現した．その上で，個々のタイプひび割れの進行過程を多段階指数劣化ハザードモデルで表現するとともに，個々のタイプのひび割れの中でもっとも損傷度が大きいひび割れのみが観測される状況を競合的劣化ハザードモデルを用いて表現した．つぎに，道路舗装のひび割れに関する定期測定結果に基づいて，ハザードモデルを推計し，道路の構造特性，舗装特性，および交通条件が道路舗装のひび割れ過程に及ぼす影響について分析した．さらに，東関東自動車道におけるひび割れに関する測定結果に基づいて，ひび割れ進行過程に関する実証的な知見を得，既存のモデルとの差異を明確にした．**4章**では，土木施設の劣化過程をマルコフ劣化モデルとして表現するとともに，健全度の測定結果に誤差が発生するメカニズムを隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現できることを示した．その際，測定誤差として代表値問題により発生するシステム誤差に着目した．さらに，システム誤差が介在するような見かけの健全度に関する測定データに基づいて，真の健全度により定義されるマルコフ劣化モデルを，マルコフ連鎖モンテカルロシミュレーションによりベイズ推計する方法論を提案した．さらに，道路舗装を対象とした実証分析の結果，路面性状調査により測定される道路舗装の劣化情報に無視できないシステム的誤差が存在することを明らかにした．その上で，隠れマルコフ劣化モデルを用いて，システム誤差の背後に存在する劣化過程をマルコフ劣化モデルとして効果的に表現できることを明らかにした．

本研究で提案している方法論は，いずれも実用的かつ意義の大きいものであり，今後，

実際の現場において適用を試み，より一層の精緻化を図っていくことが望ましい．

5.2 今後の課題

本研究で提案したハザードモデルを用いた統計的劣化予測モデルは，多様な種類の土木施設の劣化予測に適用可能であるが，各章の結言で少し触れたように，その適用範囲を拡大するために以下の課題が残されている．

第１に，個々の土木施設に無視できない異質性が含まれる場合がある．特に，初期時点での工事不良や初期故障が存在する場合，このような異質性が問題になる．土木施設の劣化過程に関するデータの中から，個別の土木施設が有する異質性を識別するような方法論の開発が必要である．この種の異質性を識別する方法として，混合ハザードモデルを用いた劣化予測モデルが有用であろう．第２に，本研究では，劣化状態が離散的な指標である健全度で表現されるような土木施設を対象とした．しかしながら，本来劣化状態は連続的なものであり，得られるデータが連続値であることが多い．今後，連続状態に関する劣化予測モデルを開発する必要がある．第３に，劣化予測モデルの比較が行えないことが挙げられる．**1章**でも触れたように，劣化予測モデルは近年目覚しい発展を遂げており，本研究でも複数の劣化予測モデルを提案した．しかし，現在のところモデルの良し悪しに関しては，各モデルごとの絶対的な評価しか行うことができない．このため，同じ劣化現象をモデル化する際に複数の選択肢が存在する場合，どのモデルが劣化現象を最もよく表現できるかを知ることができない．今後，このような劣化予測モデルの比較手法を確立する必要がある．最後に，本研究の最終的な目標は，**1章**で述べたとおり，アセットマネジメントシステム開発にある．1980年代に道路ストックの荒廃が顕在化したアメリカでは，全米橋梁点検基準の策定，点検員資格の制度化および維持修繕業務に対する連邦補助制度の創設などにより劣化した道路施設の再生が進められた[16)]．本研究を始めとする劣化予測モデルに基づき，土木施設の点検と健全度評価や劣化予測から対策工事に至る一連のアクションを結びつけることにより，アセットマネジメントシステムに重要な役割を果たす点検システムの構築を行う必要がある．

A-I　数学的補足

$\eta_{nm(n),jm} = \theta_{nm(n)} - \theta_{jm}$と置く．この時，$\pi_{il,jm}$ $(i = 0,\cdots,I-1; l = 0,\cdots,L; m = 1,\cdots,L)$ を展開すれば次式を得る．

$$\pi_{il,jm} = \sum_{m(i+1)=1}^{L} \cdots \sum_{m(j-1)=1}^{L} \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-3} z_n}$$
$$\left(\prod_{n=i}^{j-1} \rho_{nm(n)m(n+1)}\right) \exp\left(-\theta_{jm}Z - \sum_{n=i}^{j-2} \eta_{nm(n),jm} z_n\right)$$
$$\int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-2} z_n} \exp(-\eta_{j-1m(l-1),jm} z_{j-1}) dz_i \cdots dz_{j-1}$$
$$= -\sum_{m(i+1)=1}^{L} \cdots \sum_{m(j-1)=1}^{L} \frac{1}{\eta_{j-1m(l-1),jm}} \int_0^Z \cdots$$
$$\int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-3} z_n} \left(\prod_{n=i}^{j-1} \rho_{nm(n)m(n+1)}\right) \exp\Big(-\theta_{j-1m(j-1)}Z$$
$$-\sum_{n=i}^{j-2} \eta_{nm(n),j-1m(j-1)} z_n\Big) dz_i \cdots dz_{j-2}$$
$$+\sum_{m(i+1)=1}^{L} \cdots \sum_{m(j-1)=1}^{L} \frac{\rho_{j-1m(j-1)m}}{\eta_{j-1m(j-1),jm}} \int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-4} z_n}$$
$$\left(\prod_{n=i}^{j-2} \rho_{nm(n)m(n+1)}\right) \exp\left(-\theta_{jm}Z - \sum_{n=i}^{j-3} \eta_{nm(n),jm} z_n\right)$$
$$\int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-3} z_n} \exp(-\eta_{j-2m(j-2),jm} z_{j-2}) dz_i \cdots dz_{j-2} \quad (付1)$$

第1項を整理すると，

$$-\sum_{m(j-1)=1}^{L} \frac{\rho_{j-1m(j-1)m}}{\eta_{j-1m(j-1),jm}} \sum_{m(i+1)=1}^{L} \cdots \sum_{m(j-2)=1}^{L} \int_0^Z \cdots$$
$$\int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-3} z_n} \left(\prod_{n=i}^{j-2} \rho_{nm(n)m(n+1)}\right) \exp\Big(-\theta_{j-1m(j-1)}Z$$
$$-\sum_{n=i}^{j-2} \eta_{nm(n),j-1m(j-1)} z_n\Big) dz_i \cdots dz_{j-2}$$
$$= -\sum_{m(j-1)=1}^{L} \frac{\rho_{j-1m(j-1)m}}{\eta_{j-1m(j-1),jm}} \pi_{il,j-1m(j-1)} \quad (付2)$$

となる．第2項を展開すると，

$$-\sum_{m(i+1)=1}^{L} \cdots \sum_{m(j-1)=1}^{L} \frac{\rho_{j-1m(j-1)m}\rho_{j-2m(j-2)m(j-1)}}{\eta_{j-1m(j-1),jm}\eta_{j-2m(j-2),jm}}$$
$$\int_0^Z \cdots \int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-4} z_n} \left(\prod_{n=i}^{j-3} \rho_{nm(n)m(n+1)}\right) \exp$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(-\theta_{jm}Z-\sum_{n=i}^{j-3}\eta_{nm(n),jm}z_n\Big)\Big[\exp\Big\{-\eta_{j-2m(j-2),jm}\\
&\Big(Z-\sum_{n=i}^{j-3}z_n\Big)\Big\}-1\Big]dz_i\cdots dz_{j-3}\\
&=-\sum_{m(j-2)=1}^{L}\sum_{m(j-1)=1}^{L}\frac{\rho_{j-1m(j-1)m}\rho_{j-2m(j-2)m(j-1)}}{\eta_{j-1m(j-1),jm}\eta_{j-2m(j-2),jm}}\\
&\Big[\pi_{il,j-2m(j-2)}+\sum_{m(i+1)=1}^{L}\cdots\sum_{m(j-3)=1}^{L}\\
&\Big\{\int_0^Z\cdots\int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-5}z_n}\left(\prod_{n=i}^{j-3}\rho_{nm(n)m(n+1)}\right)\\
&\exp\left(-\theta_{jm}Z-\sum_{n=i}^{j-4}\eta_{nm(n),jm}z_n\right)\int_0^{Z-\sum_{n=i}^{j-4}z_n}\\
&\quad\exp(-\eta_{j-3m(j-3),jm}z_{j-3})dz_i\cdots dz_{j-3}\Big\}\Big] \qquad \text{(付 3)}
\end{aligned}
$$

を得る．上記のように展開すれば，次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\pi_{il,jm}=-\sum_{m(j-1)=1}^{L}\frac{\rho_{j-1m(j-1)m}}{\eta_{j-1m(j-1),jm}}\pi_{il,j-1m(j-1)}\\
&-\sum_{m(j-2)=1}^{L}\sum_{m(j-1)=1}^{L}\frac{\rho_{j-1m(j-1)m}\rho_{j-2m(j-2)m(j-1)}}{\eta_{j-1m(j-1),jm}\eta_{j-2m(j-2),jm}}\\
&\pi_{il,j-2m(j-2)}-\cdots+\sum_{m(i+1)=1}^{L}\cdots\sum_{m(j-1)=1}^{L}\\
&\prod_{n=i+1}^{j-1}\frac{\rho_{nm(n)m(n+1)}}{\eta_{nm(n),jm}}\rho_{il,i+1m(i+1)}\\
&\int_0^Z\exp(-\theta_{jm}Z)\exp(-\eta_{il,jm}z_i)dz_i=\text{式}\,(2.23) \qquad \text{(付 4)}
\end{aligned}
$$

参考文献

1) 小林潔司:アセットマネジメント研究のフロンティア，土木学会論文集，No.744/IV-61, pp.11-13, 2003.
2) 小澤一雅：アセットマネジメントシステム導入の考え方，土木学会誌，Vol.89，No.8, pp.10-11, 2004.
3) 西川和廣：道路橋の寿命と維持管理，土木学会論文集，No.501/I-29, pp.1-10，1994.
4) 西川和廣：ライフサイクルコストを最小にするミニマムメンテナンス橋の提案，橋梁と基礎，Vol.31，No.8，pp.64-72，1997.
5) 関博：維持管理に関する研究展望，土木学会論文集，No.557/V-34, pp.1-14，1997.
6) 小林潔司　他：特集-アセットマネジメント研究のフロンティア-，土木学会論文集，No.744/IV-61, pp.11-75，2003.
7) 藤井治嘉：道路舗装の維持管理，土木学会論文集，No.366/V-4, pp.13-26, 1986.
8) 阿部頼政：舗装管理システムに関する研究の動向，土木学会論文集，No.372/V-5, pp.17-27, 1986.
9) 慈道充，江尻良，織田澤利守，小林潔司：道路舗装管理会計システムアプリケーション，土木情報利用技術論文集，Vol.13，pp.125-135，2004.
10) 岩松幸雄，早川裕史，原田隆郎：道路橋構造物の維持管理システムに関する研究，土木学会論文集，No.444/VI-16, pp.69-76, 1992.
11) 宮本文穂，河村圭，中村秀明：Bridge Management System (BMS) を利用した既存橋梁の最適維持管理計画の策定，土木学会論文集，No.588/VI-38, pp.191-208，1998.
12) 青木一也，若林伸幸，大和田慶，小林潔司：橋梁マネジメントシステムアプリケーション，土木情報利用技術論文集，Vol.14，pp.199-210，2005.
13) 土木学会コンクリート委員会：コンクリート標準示方書[維持管理編]，土木学会，2001.
14) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説（I 共通編，II 鋼橋編），丸善，2002
15) （財）海洋架橋・橋梁調査会：道路橋マネジメントの手引き，2005.
16) 国土交通省道路局：「道路構造物の今後の管理・更新のあり方」に関する提言，http://www.mlit.go.jp/road/current/kouzou/，2003.
17) Lee, T.C., Judge, G.G. and Zellner, A. : *Estimating the Parameters of the Markov Probability Model From Aggregate Time Series Data*, Amsterdam, North-Holland, 1970.
18) 保田敬一，小林潔司：BMS における点検結果と状態推移確率が LCC に及ぼす影響，建設マネジメント論文集，Vol.11, pp.111-122，2004.

19) 杉崎光一，貝戸清之，小林潔司：目視検査周期の不均一性を考慮した統計的劣化予測手法の構築，構造工学論文集，Vol.52A，pp.1-10，2006.

20) 貝戸清之，阿部允，藤野陽三：実測データに基づく構造物の劣化予測，土木学会論文集，No.744/IV-61, pp.29-38, 2003.

21) 青木一也，山本浩司，小林潔司：劣化予測のためのハザードモデルの推計，土木学会論文集，No.791/VI-67，pp.111-124，2005.

22) Mishalani, R. and Madanat, S. : Computation of infrastructure transition probabilities using stochastic duration models, ASCE *Journal of Infrastructure Systems*, Vol.8, No.4, pp.139-148, 2002.

23) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82, 2005.

24) 青木一也，山本浩司，津田尚胤，小林潔司：多段階ワイブル劣化ハザードモデル，土木学会論文集，No.798/VI-68，pp.125-136, 2005.

25) 津田尚胤，貝戸清之，山本浩司，小林潔司：ワイブル劣化ハザードモデルのベイズ推計法，土木学会論文集，No.798/VI-68，pp.125-136, 2006.

26) 貝戸清之，小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定，土木学会論文集A，Vol.63, No.2. pp.336-355.

27) 小林潔司，熊田一彦，佐藤正和，岩崎洋一郎，青木一也：サンプル欠損を考慮した舗装劣化予測モデル，土木学会論文集F，Vol.63，No.1，pp.1-15，2007.

28) 貝戸清之，山本浩司，小濱健吾，岡田貢一，小林潔司：ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル：交通管制システムへの適用，土木学会論文集，2007.

29) Lancaster, T. : *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.

30) 川口敞之，高田澄夫：高速道路の舗装性状の実態－日本道路公団福岡管理局管内，舗装，Vol.18，No.7，pp.8-17, 1983.

31) 川島義昭，福島公，三好康夫：高速道路におけるアスファルト舗装のひび割れ－実態と発生機構に関する一考察－，昭和58年度日本道路公団試験所報告，pp.67-79, 1984.

32) Gerritsen, A.H., Van Gurp, C.A.P.M., Van der Heide, J.P.J, Molenaar A.A.A. and Pronk, A.C.: Prediction and Prevention of Surface Cracking in Asphalt Pavements, *Proceedings of 6th International Conference on the Structural Design of Asphalt Pavemtns*, pp.378-391, 1987.

33) 姫野賢治，渡辺隆，丸山暉彦：アスファルト混合物の拡張された疲労破壊基準に関する研究，土木学会論文集，No.378/V-6，pp.71-80, 1993.

34) 西澤辰男，松野三朗：アスファルト舗装の車輪走行位置に生ずる縦表面ひびわれについて，土木学会論文集，No.478/V-21，pp.71-80, 1993.

35) 東滋夫，金井利浩，岡部俊幸：アスファルトの劣化を考慮した縦表面ひびわれに関する一考察，土木学会第53回年次学術講演会，V-38，pp.76-77, 1998.

36) Tobin, J. : Estimation of relationships for limited dependent variables, *Econometrica*, Vol.26, pp.24-36, 1958.

37) Amemiya, T. and Boskin, M. : Regression analysis when the dependent variables is truncated lognormal, with an application to the determination of the duration of welfare dependency, *International Economic Review*, Vol.15, p. 485, 1974.

38) 岩田暁一：計量経済学，有斐閣，1982.

39) Jacoby, S.L.S., Kowalk, J.S. and Pizzo, J.T.: *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*, Printice-Hall, 1972.

40) 繁桝算男：ベイズ統計入門，東京大学出版会，1985.

41) 和合肇：ベイズ計量経済分析，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用，東洋経済新報社，2005.

42) Ibrahim, J.G., Ming-Hui, C. and Sinha, D. : *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statics, 2001.

43) 伊庭幸人：計算統計学のフロンティアー計算統計II，マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005.

44) 貝戸清之，小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推定，土木学会論文集A，Vol.63，No.2，pp.336-355，2007.

45) Titterington, D.M., Smithe, A.F.M. and Makov, U.E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons., 1985.

46) Robert, C.P.: Mixtures of Distributions: Inference and Estimation, in: Gillks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. (eds.): *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, Chapman & Hall, 1996.

47) Dempster, A.P., Laird, N. M. and Rubin, D. B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.39, pp.1-38, 1977.

48) Diebolt, J. and Robert, C.P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.56, pp.363-375, 1994.

49) Robert, C.P., Rydén, T. and Titterington, D.M.: Bayesian inference in hidden Markov models through the reversible jump Markov chain Monte Carlo method, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.62, pp.57-75, 2000.

50) Celeux, G., Hurn, M. and Robert, C.P.: Computational and inferential difficulties

with mixture posterior distributions, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.95, pp.957-970, 2000.

51) Gourieroux, C. : *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.

52) MacDonald, I.L. and Zucchini, W.: *Hidden Markov and Other Models for Discrete-valued Time Series*, Chapman & Hall, 1997.

53) Hamilton, J.: A new approach to the economic analysis of nonstationary series and the business cycle, *Econometrica*, Vol. 57(2), pp.357-384. 1989.

54) Diebold, F.X. and Inoue, A.: Long memory and regime switching, *Journal of Econometrics*, Vol.105, pp.131-159, 2001.

55) Kim, C.-J. and Nelson, C.R.: *State-Space Models with Regime Switching : Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, MIT Press, 1999.

56) Bauer, W.: Recent developments in econometric estimation of frontiers, *Journal of Econometrics*, Vol.46, pp.39-56, 1990.

57) Kumbhakar, S. C. and Lovell, C.A.K.: *Stochastic Frontier Analysis*, Cambridge University Press, 2000.

58) Ibrahim, J.G., Ming-Hui, C. and Sinha, D.: *Bayesian Survival Analysis*, Springer Series in Statics, 2001.

59) Robert, C.P., Rydén, T. and Titterington, D.M.: Bayesian inference in hidden Markov models through the reversible jump Markov chain Monte Carlo method, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.62, pp.57-75, 2000.

60) Geman, S. and Geman, D. : Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images, *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.6, pp.721-741, 1984.

61) Gilks, W.R. and Wild, P. : Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling, *Applied Statistics*, Vol.41, pp.337-348, 1992.

謝　辞

本論文を結ぶにあたり，本研究の遂行に際して，ご指導，ご協力を頂きました多くの方々に感謝の意を表します．京都大学工学研究科の小林潔司教授には，本論文を作成するにあたり終始適切なご指導，ご助言を頂きました．小林潔司教授には，大変ご多忙な中，時間を割いて頂き，終始適切な御指導と御助言，そして暖かい励ましの言葉を頂きました．心から感謝申し上げます．京都大学工学研究科の松島格也准教授には，ご多忙の中，研究に対する批評から，日常生活に至るまで大変お世話になりました．京都大学工学研究科の大西正光助教には，日頃より本論文に対して貴重なご指摘を頂き，日常生活においても大変お世話になりました．感謝にたえない次第です．計画マネジメント論研究室諸兄には，本論文を取りまとめる上で，多大な協力を頂きました．東北大学情報科学研究科の織田澤利守助教,（株）パスコ研究開発センターの青木一也氏の両氏には，ベトナムでの滞在期間中を始め，再度に渡り，研究の取り組み方，本論文にも関係する基礎的な素養をご指導いただき，貴重な時間を小生のために割いて頂きました．万謝の意を申し上げます．京都大学経営管理大学院岡田貢一氏，小川貴裕氏の両氏には，本論文の範囲に限らず，日頃よりアセットマネジメントに関する議論をさせていただくと共に，研究に取り組む姿勢を学ばせて頂きました．心より感謝の意を申し上げます．そして，殊に同学年の仲間には大変お世話になりました．京都大学工学研究科修士課程の徐飛氏，関川裕己氏，西畠綾氏には，研究室を中心とした生活を送る上で，互いに刺激し合い，有意義な時間を過ごすと共に，至らない小生を度々フォローして頂きました．また，京都大学工学研究科修士課程の小濱健吾氏，同博士課程後期のLe Thanh NAM氏の両氏には，研究室での生活のみならず，本論文をまとめる上でも有意義なアドバイスや協力を頂き，お世話になりました．感謝の意を表すとともに，今後もそれぞれのフィールドにおける活躍を願って止みません．また，小生の研究の一環であるベトナムでのアセットマネジメント理論の推進に際して，Nguyen Dinh Thao氏には，ベトナムでの小生の生活を，多忙の中，公私に渡り労を厭わずサポートしていただきました．厚く御礼申し上げます．本論文作成に際しては,（株）高速道路総合技術研究所の熊田一彦氏から貴重なデータを提供していただきました．深く感謝する次第です．さらに，書面では書ききれぬ多くの方々に，小生の研究生活は支えられてきました．ここに記すことができない失礼をお詫びするとともに，感謝の意を記します．最後になりましたが，岩井証券（株）の津田尚胤氏，大阪大学フロンティア研究センターの貝戸清之氏の両氏とは本論文を完成させる過程で，有意義な議論を重ねながら研究を深め，またその合間には両氏より基礎的な素養や社会人としての姿勢をお教え頂きました．両氏との協力なくして，この研究を取りまとめることはできませんでした．深甚なる感謝の意を表します．