1

(a)　ラグランジュ関数を $\mathcal{L} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda(y - x_1^a x_2^{1-a})$ とおくと，1 階条件より

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = w_1 - a\lambda x_1^{a-1} x_2^{1-a} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = w_2 - (1-a)\lambda x_1^a x_2^{-a} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - x_1^a x_2^{1-a} = 0$$

これより λ を消去して，

$$x_1(\boldsymbol{w}, y) = \{\frac{aw_2}{(1-a)w_1}\}^{1-a} y$$
$$x_2(\boldsymbol{w}, y) = \{\frac{(1-a)w_1}{aw_2}\}^{a} y$$

従って，費用関数は

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{w}, y) &= w_1\{\frac{aw_2}{(1-a)w_1}\}^{1-a} y + w_2\{\frac{(1-a)w_1}{aw_2}\}^{a} y \\ &= \left\{\left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a} + \left(\frac{1-a}{a}\right)^{a}\right\} w_1^a w_2^{1-a} y \end{aligned}$$

となる．

(b)　制約条件より x_1 を消去して，

$$c(\boldsymbol{w}, y, k) = w_1(yk^{-(1-a)})^{1/a} + w_2 k$$

が得られる．

(c)　以下の最大化問題

$$\begin{aligned} \pi(p, \boldsymbol{w}, k) &= \max_{x_1, y} py - w_1 x_1 - w_2 k \\ &= \max_{y} py - c(\boldsymbol{w}, y, k) \\ &= \max_{y} py - w_1(yk^{-(1-a)})^{1/a} - w_2 k \end{aligned}$$

を考える．1 階条件

$$p = \frac{1}{a} w_1 k^{-(1-a)/a} y^{1/a-1}$$

より，供給関数は $y = (\frac{pa}{w_1})^{a/1-a} k$ となる．したがって，利潤関数は

$$\begin{aligned} \pi(p, \boldsymbol{w}, k) &= p\left(\frac{pa}{w_1}\right)^{a/(1-a)} k - w_1 k^{-(1-a)/a} \left(\frac{pa}{w_1}\right)^{1/(1-a)} k^{1/a} - w_2 k \\ &= \left(\frac{pa}{w_1^a}\right)^{1/(1-a)} k \left(\frac{1-a}{a}\right) - w_2 k \end{aligned}$$

2

(a)　資本整備水準が $k=2$ で固定されているときの短期費用関数は，

$$c(y,2)=2y^3+4 \tag{1}$$

企業の利潤関数は，

$$\begin{aligned}\pi(p,y)_{|p=24} &= \max_y 24y-c(y,2) \\ &= \max_y 24y-2y^3-4\end{aligned} \tag{2}$$

一階条件より，$y=2$ となる．

(b)　長期において企業は費用が最小となるような資本設備の大きさ $k(y)$ を選ぶ．したがって，費用最小化の条件は，

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c(y,k)}{\partial k}=-16y^3k^{-3}+2=0 \\ \Leftrightarrow \quad & k(y)=2y\end{aligned}$$

(c)　$k(y)=2y$ を短期費用関数に代入すると，

$$\begin{aligned}c(y,k(y)) &= 8y^3(2y)^{-2}+2(2y) \\ &= 6y \\ &= c(y)\end{aligned}$$

となり，これが長期費用関数である．

3

(a)　限界費用 (MC) は，

$$MC=y^2-4y+5$$

平均費用 (AC) は，

$$AC=\frac{1}{3}y^2-2y+5+\frac{32}{3y} \tag{3}$$

平均可変費用 (AVC) は，

$$AVC=\frac{1}{3}y^2-2y+5$$

(b)　x 財の市場価格を p と置くと，企業の利潤関数 $\pi(p,y)$ は

$$\begin{aligned}\pi(p,y) &= \max_y py-c(y) \\ &= \max_y py-\frac{1}{3}y^3+2y^2-5y-\frac{32}{3}\end{aligned}$$

利潤最大化の 1 階条件は

$$p = y^2 - 4y + 5 (= MC)$$

である．このとき，供給関数 $y(p)$ は $y(p) = (p-1)^{1/2} + 2$ である．ただし，価格が低くなると企業の利潤がマイナスになることがあり，企業は活動を停止する．企業が正の利潤を得る条件は，

$$\begin{aligned} & \pi = py - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - 5y - \frac{32}{3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & p(= MC) \geq \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5 + \frac{32}{3y}(= AC) \end{aligned}$$

この境界点 ($MC = AC$ をみたす点) が損益分岐点である．

$$\text{損益分岐点} \quad (p^0, y^0) = (5, 4)$$

固定費用は $\frac{32}{3}$ であるから，$x = 0$ のときの企業の利潤は $-\frac{32}{3}$ となる．たとえ利潤がマイナスであっても，企業の利潤が $-\frac{32}{3}$ よりも大きければ，より少ない損ですむから，企業は財を生産する．したがって，企業が財を生産するための条件は

$$\begin{aligned} & \pi = py - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - 5y - \frac{32}{3} \geq -\frac{32}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & p(= MC) \geq \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5 (= AVC) \end{aligned}$$

この境界点 ($MC = AVC$ となる点) が操業停止点である．

$$\text{操業停止点} \quad (p^1, y^1) = (2, 3)$$

(c)　企業が操業を停止する点（MC=AVC となる点）は問 (2) より $(p^1, y^1) = (2, 3)$ であるので，企業の供給関数は以下で表される．

$$y = \begin{cases} (p-1)^{1/2} + 2 : p \geq 2 \text{ の時} \\ 0 : p < 2 \text{ の時} \end{cases}$$

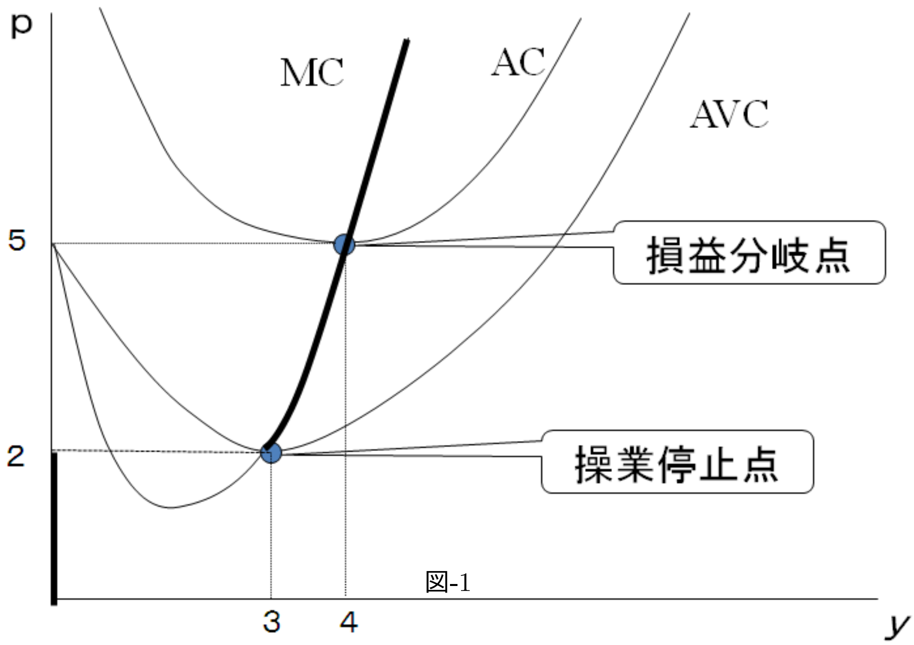

図-1