1

1.1

(a)　ラグランジュ関数を $\mathcal{L} = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda(y - x_1^a x_2^{1-a})$ とおくと，１階条件より

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = w_1 - a\lambda x_1^{a-1}x_2^{1-a} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = w_2 - (1-a)\lambda x_1^a x_2^{-a} = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = y - x_1^a x_2^{1-a} = 0$$

これより λ を消去して，

$$x_1(\boldsymbol{w}, y) = \{\frac{aw_2}{(1-a)w_1}\}^{1-a}y$$
$$x_2(\boldsymbol{w}, y) = \{\frac{(1-a)w_1}{aw_2}\}^{a}y$$

従って，費用関数は

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{w}, y) &= w_1\{\frac{aw_2}{(1-a)w_1}\}^{1-a}y + w_2\{\frac{(1-a)w_1}{aw_2}\}^{a}y \\ &= \left\{\left(\frac{a}{1-a}\right)^{1-a} + \left(\frac{1-a}{a}\right)^{a}\right\} w_1^a w_2^{1-a} y \end{aligned}$$

となる．

(b)　$A = \left\{(\frac{a}{1-a})^{1-a} + (\frac{1-a}{a})^a\right\}$ とすると，

$$\begin{aligned} \pi(p, \boldsymbol{w}) &= \max_{x_1, x_2, y} py - w_1x_1 - w_2x_2 \\ &= \max_{y} py - c(\boldsymbol{w}, y) \\ &= \max_{y} py - Aw_1^a w_2^{1-a} y \end{aligned}$$

となり，最適解の一階条件は

$$p = Aw_1^a w_2^{1-a} (= MC) \tag{1}$$

これは式 (1) が成り立つとき最適解は無数に存在することを意味する．式 (1) が成り立つとき，企業は利潤

$$\pi(p, \boldsymbol{w}) = 0$$

を得る．

1.2

(b)　制約条件より x_1 を消去して，

$$c(\boldsymbol{w}, y, k) = w_1(yk^{-(1-a)})^{1/a} + w_2k$$

が得られる．

(b)　以下の最大化問題

$$\begin{aligned}\pi(p,\boldsymbol{w},k) &= \max_{x_1,y} py - w_1x_1 - w_2k \\ &= \max_{y} py - c(\boldsymbol{w},y,k) \\ &= \max_{y} py - w_1(yk^{-(1-a)})^{1/a} - w_2k\end{aligned}$$

を考える．１階条件

$$p = \frac{1}{a}w_1k^{-(1-a)/a}y^{1/a-1}$$

より，供給関数は $y = (\frac{pa}{w_1})^{a/1-a}k$ となる．したがって，利潤関数は

$$\begin{aligned}\pi(p,\boldsymbol{w},k) &= p\left(\frac{pa}{w_1}\right)^{a/(1-a)}k - w_1k^{-(1-a)/a}\left(\frac{pa}{w_1}\right)^{1/(1-a)}k^{1/a} - w_2k \\ &= \left(\frac{pa}{w}\right)^{1/(1-a)}k\left(\frac{1-a}{a}\right) - w_2k\end{aligned}$$

2

(1) 資本整備水準が $k=2$ で固定されているときの短期費用関数は,

$$c(y,2) = 2y^3 + 4 \tag{2}$$

企業の利潤関数は,

$$\begin{aligned}\pi(p,y)_{|p=24} &= \max_{y} 24y - c(y,2) \\ &= \max_{y} 24y - 2y^3 - 4\end{aligned} \tag{3}$$

一階条件より，$y=2$ となる．

(2) 長期において企業は費用が最小となるような資本設備の大きさ $k(y)$ を選ぶ．したがって，費用最小化の条件は,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c(y,k)}{\partial k} = -16y^3k^{-3} + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & k(y) = 2y\end{aligned}$$

(3)$k(y) = 2y$ を短期費用関数に代入すると,

$$\begin{aligned}c(y,k(y)) &= 8y^3(2y)^{-2} + 2(2y) \\ &= 6y \\ &= c(y)\end{aligned}$$

となり，これが長期費用関数である.

3

(1) 限界費用 (MC) は,

$$MC = y^2 - 4y + 5$$

平均費用 (AC) は,

$$AC = \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5 + \frac{32}{3y} \tag{4}$$

平均可変費用 (AVC) は,

$$AVC = \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5$$

(2 x 財の市場価格を p と置くと，企業の利潤関数 $\pi(p, y)$ は

$$\begin{aligned}\pi(p, y) &= \max_y py - c(y) \\ &= \max_y py - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - 5y - \frac{32}{3}\end{aligned}$$

利潤最大化の 1 階条件は

$$p = y^2 - 4y + 5 (= MC)$$

である．このとき，供給関数 $y(p)$ は $y(p) = (p-1)^{1/2} + 2$ である．ただし，価格が低くなると企業の利潤がマイナスになることがあり，企業は活動を停止する．企業が正の利潤を得る条件は,

$$\begin{aligned}&\pi = py - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - 5y - \frac{32}{3} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad &p(= MC) \geq \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5 + \frac{32}{3y}(= AC)\end{aligned}$$

この境界点 ($MC = AC$ をみたす点) が損益分岐点である．

$$\text{損益分岐点} \quad (p^0, y^0) = (5, 4)$$

固定費用は $\frac{32}{3}$ であるから，$x = 0$ のときの企業の利潤は $-\frac{32}{3}$ となる．たとえ利潤がマイナスであっても，企業の利潤が $-\frac{32}{3}$ よりも大きければ，より少ない損ですむから，企業は財を生産する．したがって，企業が財を生産するための条件は

$$\begin{aligned}&\pi = py - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2 - 5y - \frac{32}{3} \geq -\frac{32}{3} \\ \Leftrightarrow \quad &p(= MC) \geq \frac{1}{3}y^2 - 2y + 5 (= AVC)\end{aligned}$$

この境界点 ($MC = AVC$ となる点) が操業停止点である．

$$\text{操業停止点} \quad (p^1, y^1) = (2, 3)$$

(3) 企業が操業を停止する点（MC=AVC となる点）は問 (2) より $(p^1, y^1) = (2, 3)$ であるので，企業の供給関数は以下で表される．

$$y = \begin{cases} (p-1)^{1/2} + 2 : p \geq 2 \text{ の時} \\ 0 : p < 2 \text{ の時} \end{cases}$$

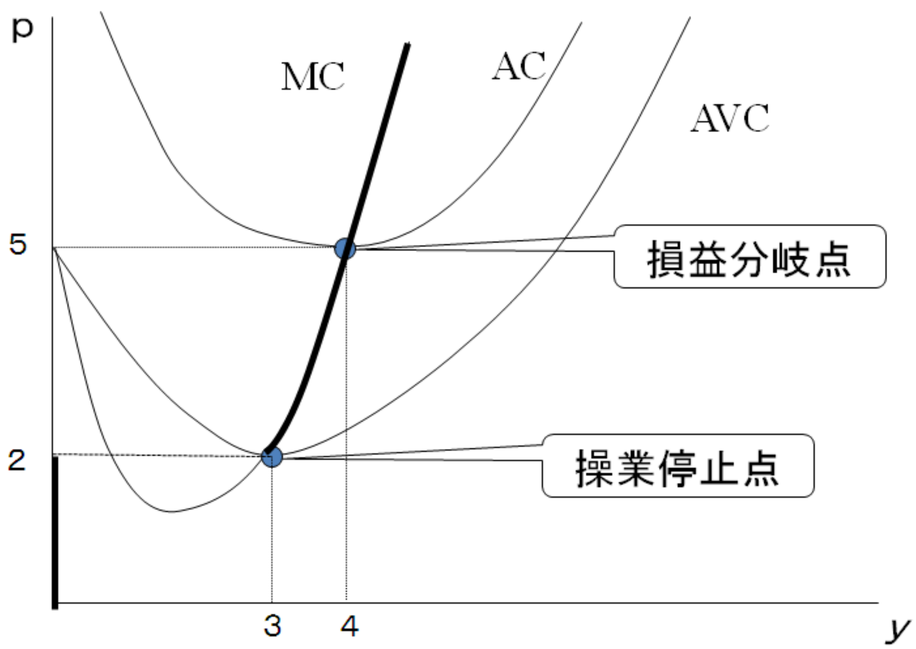

図-1