

公共経済学

消費者行動の理論

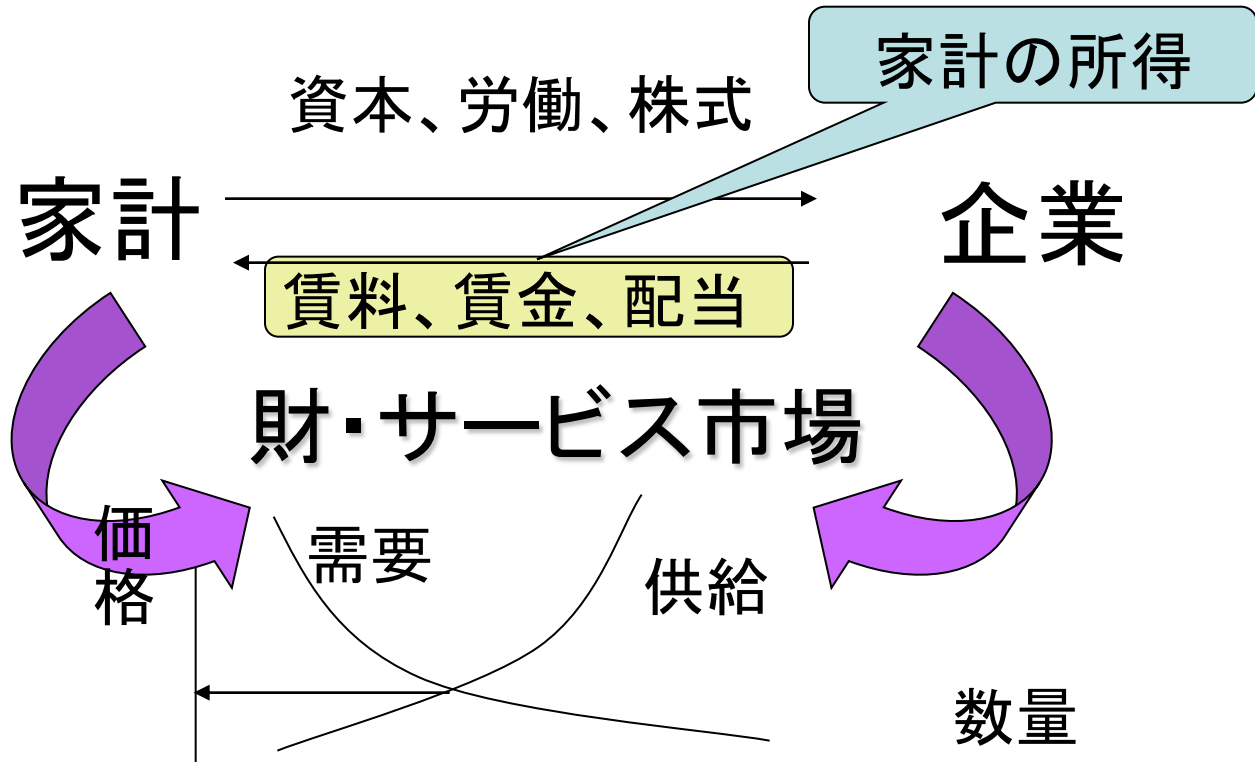
消費者(家計)行動

- 消費者の行動の特徴
- 消費可能集合(予算制約)
- 選好
- 効用
- 選択
- 需要
- 顕示選好

消費者の行動の特徴

経済主体

企業、家計、(政府)



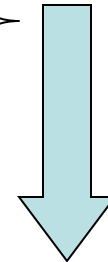
家計 = 価格受容者 (price taker)

消費可能集合(1)

家計が直面する制約

- 予算制約(所得は限られている)
- 時間制約(時間は限られている)
- 割り当て制約

一定の賃
金率で完
全代替可
能

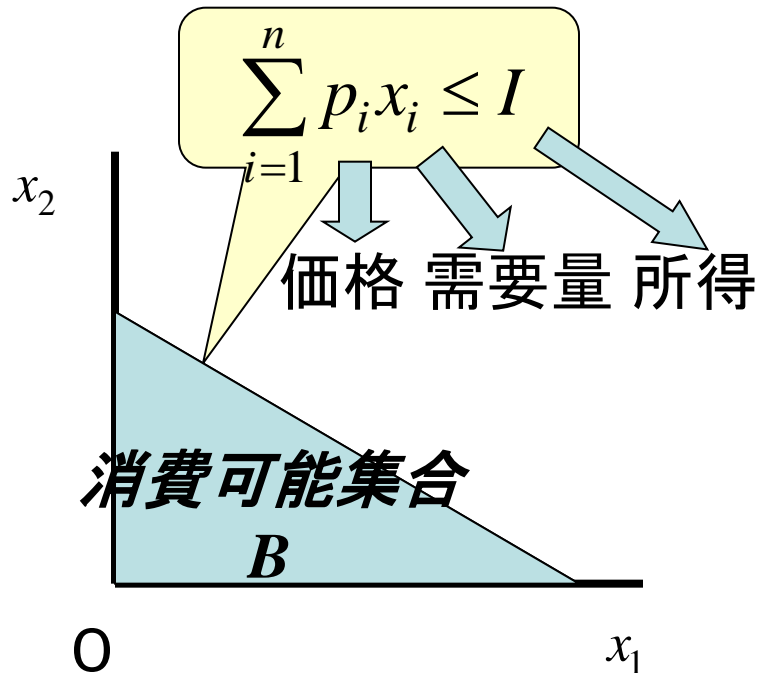


予算制約に一本化
(full-income、full-cost仮説)

通常は予算制約のみを考慮すればよい

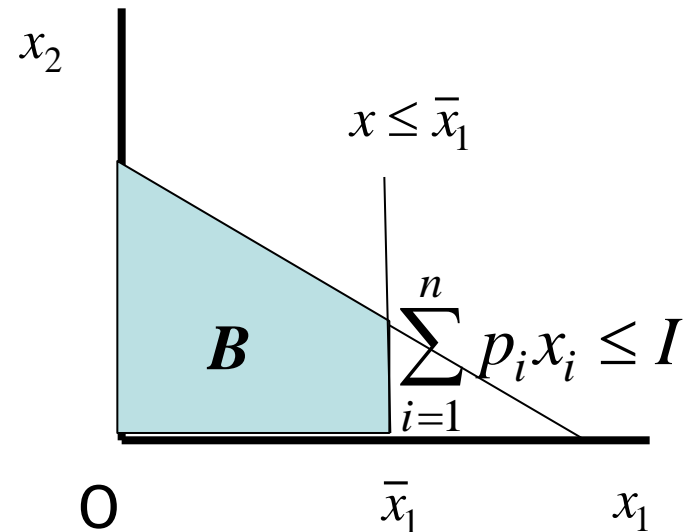
消費可能集合(2)

予算制約



$$B = \{x \in R^n \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I\}$$

割り当て制約がある場合



$$B = \{x \in R^n \mid$$

$$x \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I, x_1 \leq \bar{x}_1\}$$

選好(1)

- 選好 (preference) とは

$A \succ B$ \longleftrightarrow AはBよりも(強く)選好される
(AとBのいずれかならばAが選ばれる)

$A \succeq B$ \longleftrightarrow AはBよりも選好されるか、無差別である
(AとBのいずれかならばBが選ばれることはない)

$A \sim B$ \longleftrightarrow AとBとは選好において無差別である
(どちらを選んでも同じ)

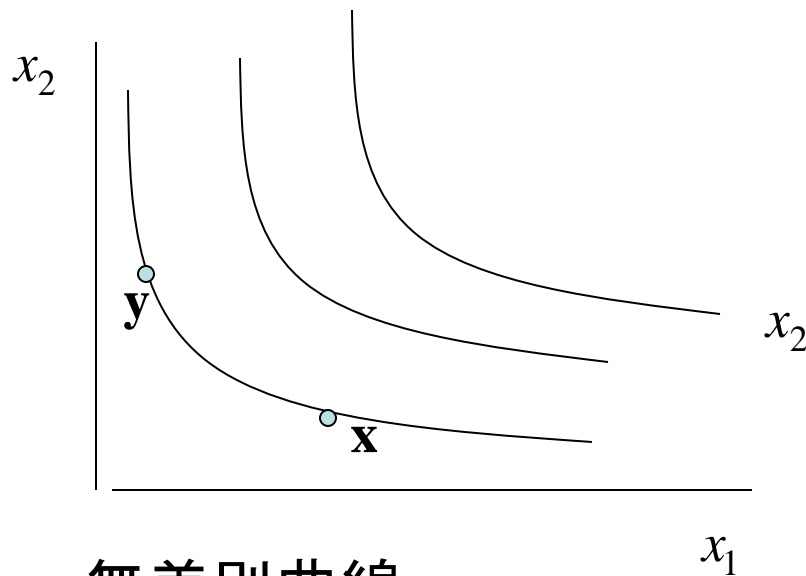
選好(2)

選好に関する仮定

1. 完備性: $\forall x, y \in X$ に対して, $x \succeq y$ または $y \succeq x$
 2. 推移性: $\forall x, y, z \in X$ に対して, $x \succeq y, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$
 3. 連続性: $\{x \in X \mid x \succeq y\}$ と $\{x \in X \mid y \succeq x\}$ は X において閉集合である。
- 全順序

ただし、 X は選択肢集合

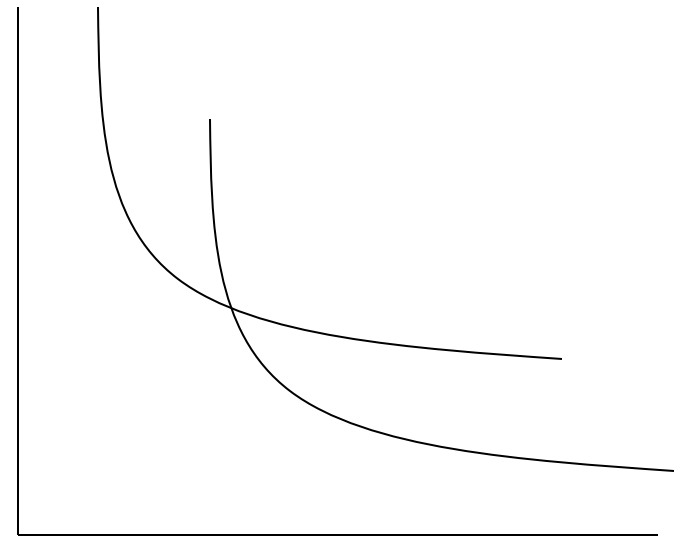
選好(3):無差別曲線



無差別曲線

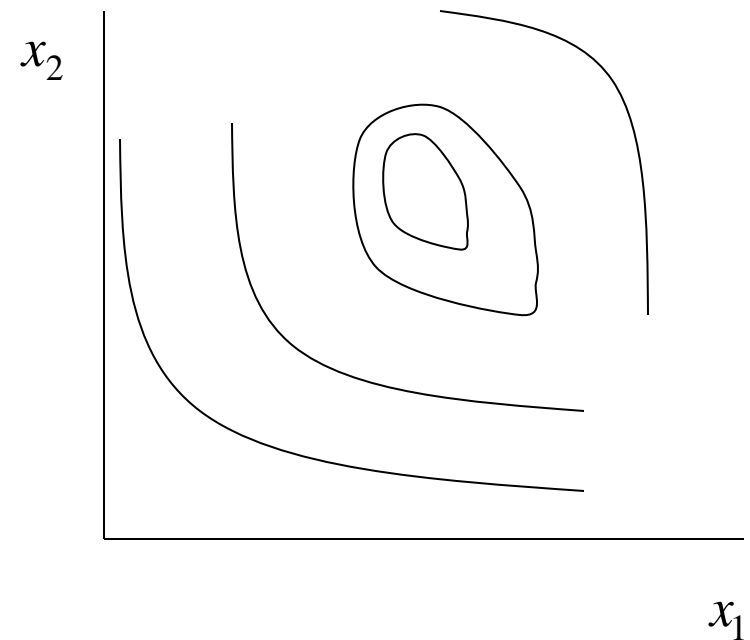
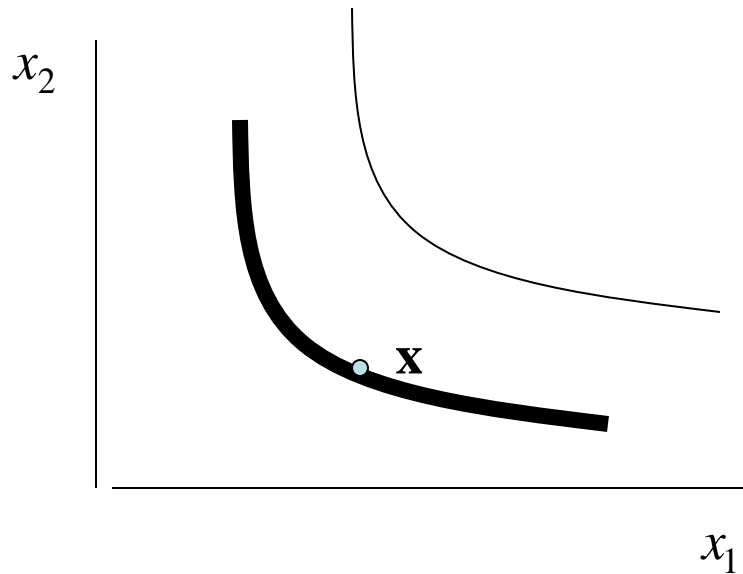
$$C(x) = \{y \in R^n \mid y \sim x\}$$

次のような無差別曲線は
仮定1-3を満たすか？



選好(4):無差別曲線(続き)

次のような無差別曲線は
仮定1-3を満たすか?



選好(5): 振る舞いのよい選好

選好に関する仮定(追加)

4. 単調性 $\forall x, y \in X$ に対して, $x \geq y \Rightarrow x \succeq y$

(5. 凸性) $\forall y \in X$ に対して

+ $\{x \in X \mid x \succeq y\}$ は凸集合である。

完備、推移、連続

→ (準凹) 効用関数の存在

効用関数

- 効用関数とは

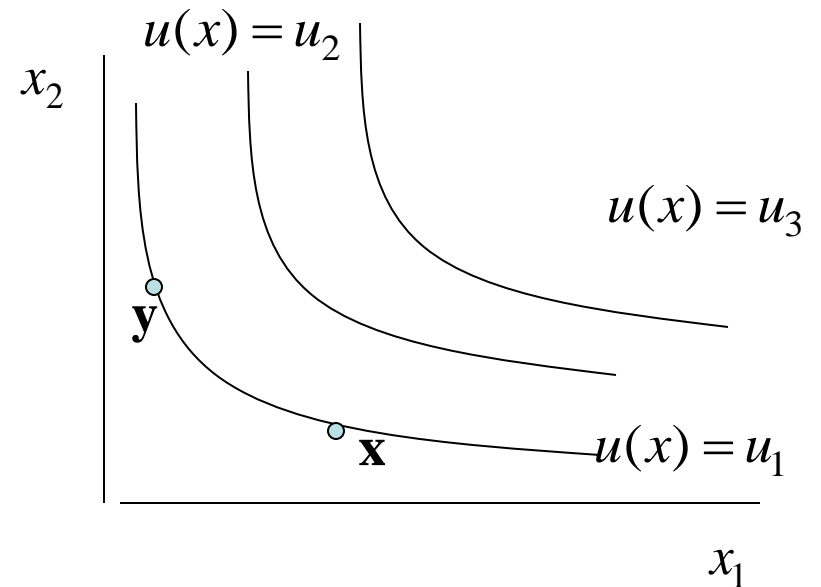
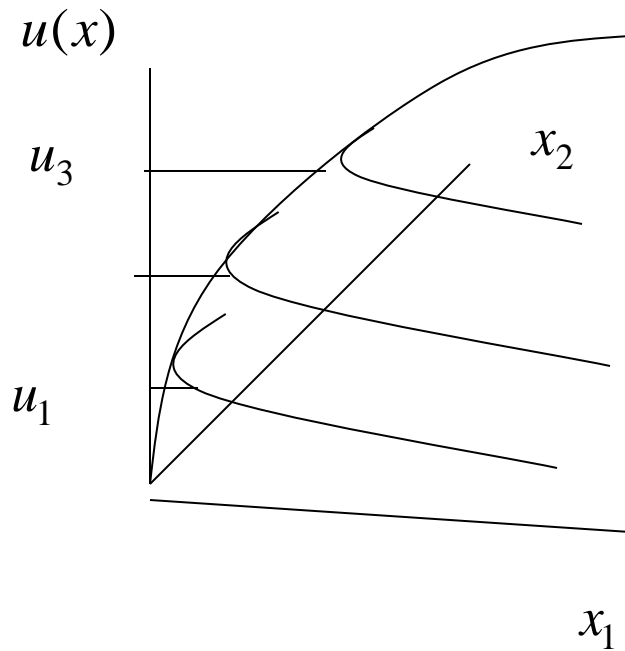
定義:

$\forall x, y \subseteq R^n$ 、 $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ を満たす関数 $u: R^n \rightarrow R$

定理: 選好が、完備、推移、連続かつ単調であれば、

$\forall x, y \subseteq R^n$ 、 $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ を満たす関数 $u: R^n \rightarrow R$
(効用関数)が存在する。

効用関数と無差別曲線



無差別曲線は効用関数の等高線として表現できる。

補足：凹関数と準凹関数

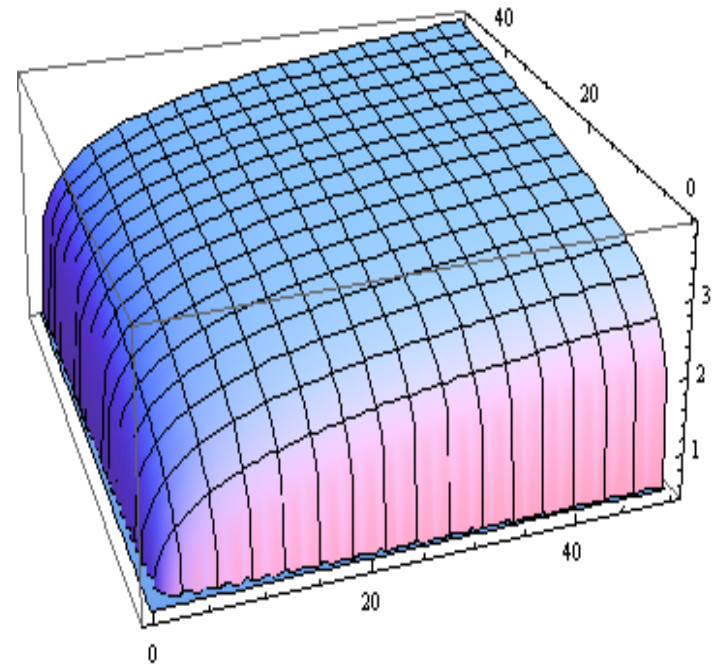
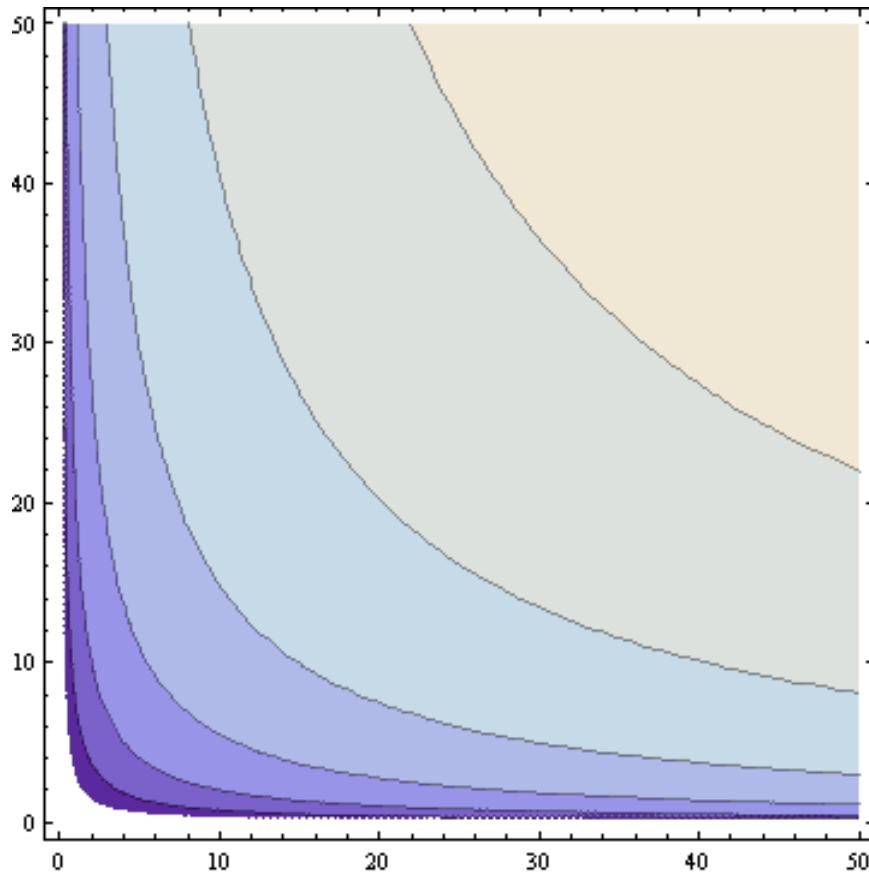
凹関数 $\forall x, y \in R^n, \forall t \in [0, 1]$ に対して
 $tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y)$
となる関数。

準凹関数 $\forall c \in R$ に対して
 $\{x \in R^n \mid f(x) \geq c\}$ が凸集合となる関数。

$f : R^n \rightarrow R$ が凹関数 $\Rightarrow f$ は準凹関数

($f : R^n \rightarrow R$ が準凹関数でも f は凹関数とは限らない)

例： $u(x) = 0.5\log x_1 + 0.5\log x_2$



いろいろな効用関数

- コブダグラス型
- 線形
- レオンチェフ型

- CES型

序数効用



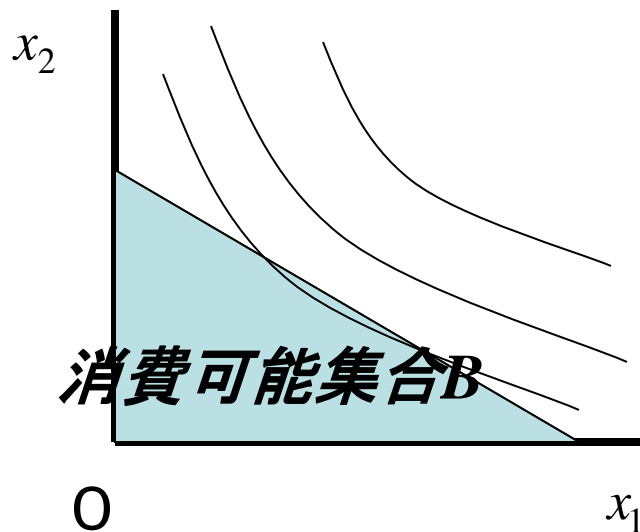
単調変換を除いて一意

意味は

同一の無差別曲線

選択

予算制約を満たす消費可能集合の中から
最も好ましい(選好される)消費の組み合わせを選択



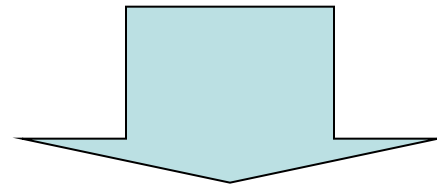
無差別曲線に対応
する効用関数の値
は右上ほど高い

消費可能集合の中で
効用関数の値を最大
にするような消費の組
み合わせを求めれば○

消費行動のモデル

$$\begin{aligned} & \max_x u(x_1, \dots, x_n) \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

効用関数: 単調
すべての財が本質的



消費行動のモデル

$$\begin{aligned} & \max_x u(x_1, \dots, x_n) \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^n p_i x_i = I \end{aligned}$$

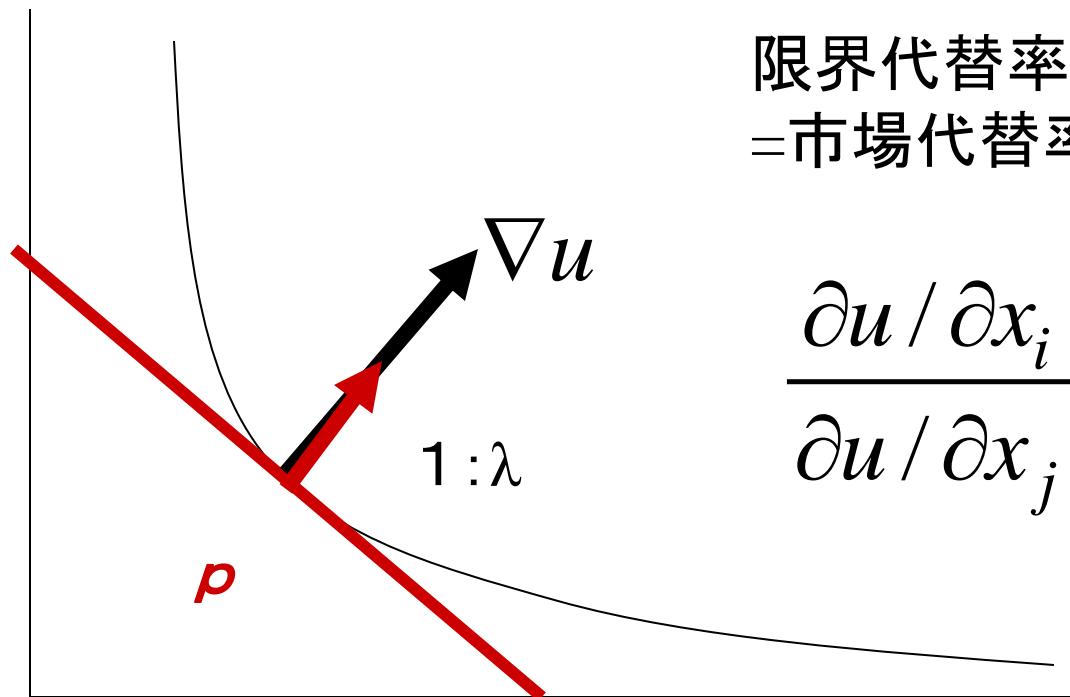
一階条件

$$L(x, \lambda) = u(x_1, \dots, x_n) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - I \right)$$

$$\partial L / \partial x_i = 0: \quad \partial u / \partial x_i = \lambda p_i$$

$$\partial L / \partial \lambda = 0: \quad \sum_{i=1}^n p_i x_i = I$$

一階条件の図解

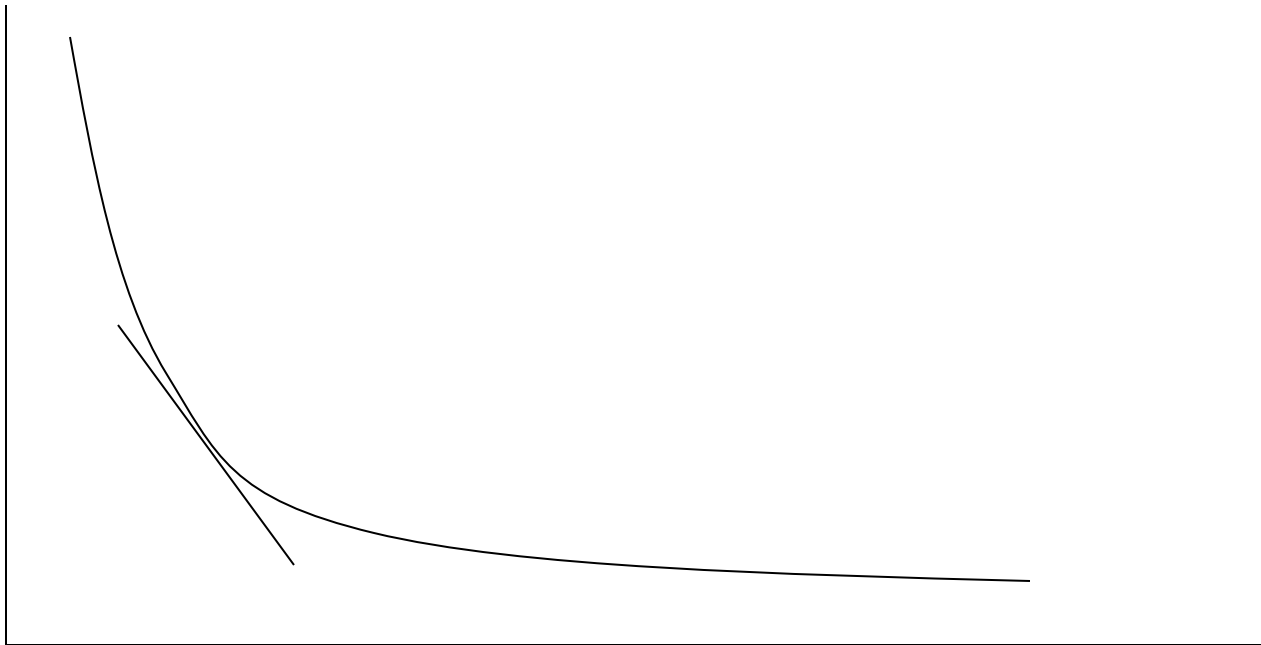


限界代替率
=市場代替率

$$\frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

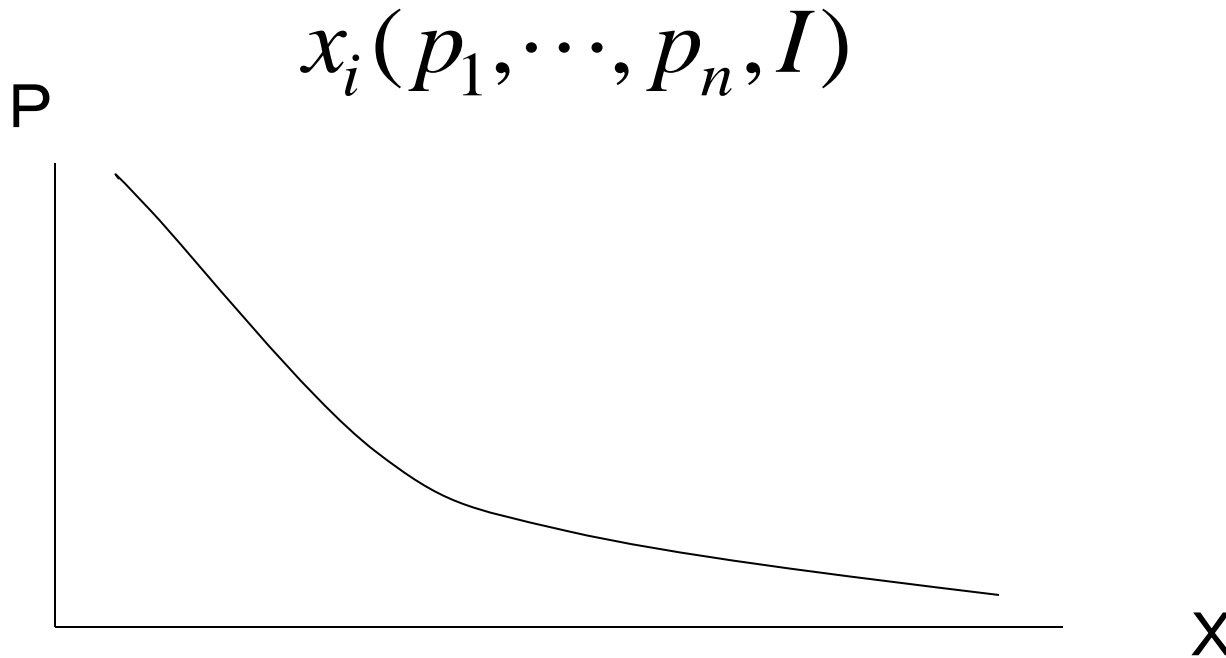
効用関数：限界代替率

- ある財1単位の減少は他のもう一つの財何単位の増加で補償できるか



需要

消費行動モデルの解
=(マーシャルの)需要関数



例題

効用関数をコブダグラス型効用関数として需要関数を求めよ

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b \rightarrow \max$$

$$\text{subject to } p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$$

解答

一階条件は、 $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^a x_2^b - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 = a x_1^{a-1} x_2^b - \lambda p_1 \quad \dots \textcircled{1} \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 = b x_1^a x_2^{b-1} - \lambda p_2 \quad \dots \textcircled{2} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I \quad \dots \textcircled{3} \end{array} \right.$$

限界代替率を用いて書き直すと、

$$MRS_{12} = \frac{p_1}{p_2}$$

解答：続き

- これを解くと

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より、} \frac{ax_1^{a-1}x_2^b}{bx_1^ax_2^{b-1}} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2}$$

$$x_2 = \frac{bp_1}{ap_2} x_1$$

$$\textcircled{3} \text{へ代入、} p_1x_1 + p_2 \frac{bp_1}{ap_2} x_1 = I$$

$$\text{整理して、} \underline{x_1(p_1, I) = \frac{a}{(a+b)p_1} I}$$

$$\underline{x_2(p_2, I) = \frac{b}{(a+b)p_2} I}$$

K次同次関数

- 関数 $f(x)$ が以下の性質を満たすときK次同次関数という。

$$\forall t > 0, x \in R^n,$$

$$f(tx) = t^k f(x)$$

問：以下の命題を証明せよ

- 需要関数は0次同次関数である。
- 需要関数は、価格について単調減少関数であり、所得について単調増加関数である

間接効用関数

間接効用関数とは

$$v(p_1, \dots, p_n, I) = \max_x u(x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^n p_i x_i = I$$

恒等式

$$\begin{aligned} &v(p_1, \dots, p_n, I) \\ &= u(x_1(p_1, \dots, p_n, I), \dots, x_n(p_1, \dots, p_n, I)) \end{aligned}$$

例題

効用関数をコブダグラス型効用関数として間接効用関数を求めよ

間接効用関数と需要関数の間に次の恒等式が成り立つことを示せ

$$x_1(p_1, \dots, p_n, I) = \frac{-\partial v(p_1, \dots, p_n, I) / \partial p_i}{\partial v(p_1, \dots, p_n, I) / \partial I}$$

所得変化と需要

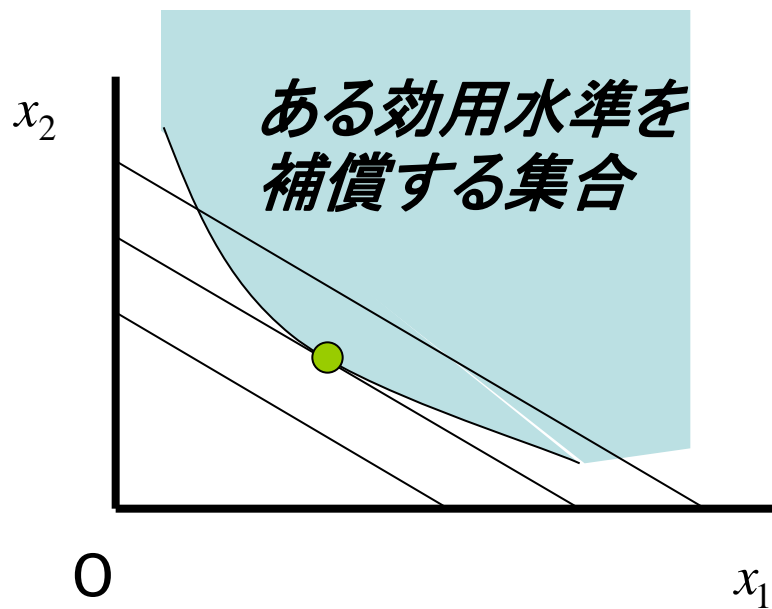
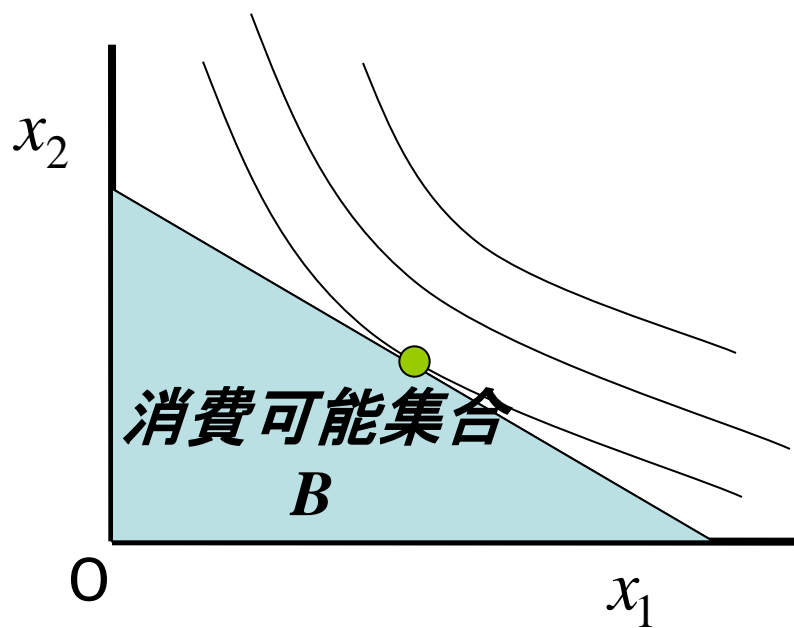
- 上級財：
 - 所得が増加したときに需要が増加する財
 - 例：高級品
- 中級財
 - 所得が増加しても需要が変化しない財
 - 例：トイレtpーパー
- 下級財
 - 所得が増加したときに需要が減少する財
 - 例：代用品（ジャガイモ、ひえ、あわ）

価格変化と需要

- 正常財：
 - 価格が増加したときに需要が減少する財
 - 例：ビール

- ギッフェン財
 - 価格が増加したときに需要が増加する財
 - 例：代用品（ジャガイモ、ひえ、あわ）

消費者行動を表現するもう一つのアプローチ



支出最小化問題

$$\min_x \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$s.t. u(x_1, \dots, x_n) \geq \underline{u}$$

- 支出関数 $e(p, \underline{u})$
- ヒックスの需要関数 (補償需要関数) $h(p, \underline{u})$

支出関数

支出最小化問題

$$e(p_1, \dots, p_n, \underline{u}) = \min_x \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

支出関数 subject to $u(x_1, \dots, x_n) \geq \underline{u}$

一階条件

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n) / \partial x_i}{\partial u(x_1, \dots, x_n) / \partial x_j}$$

$$u(x_1, \dots, x_n) = \underline{u}$$

ヒックスの需要関数(補償需要関数)

- 支出最小化問題の解

$$h_i(p_1, \dots, p_n, \underline{u})$$

- 恒等式

$$h_i(p_1, \dots, p_n, v(p_1, \dots, p_n, I)) = x_i(p_1, \dots, p_n, I)$$

$$x_i(p_1, \dots, p_n, e(p_1, \dots, p_n, \underline{u})) = h_i(p_1, \dots, p_n, \underline{u})$$

$$e(p_1, \dots, p_n, v(p_1, \dots, p_n, I)) = I$$

$$v(p_1, \dots, p_n, e(p_1, \dots, p_n, \underline{u})) = \underline{u}$$

支出関数と補償需要関数の性質

- 支出関数は p について1次同次。 p について増加、 u について増加。
- 恒等式

$$e(p_1, \dots, p_n, u) = \sum_{i=1}^n p_i h_i(p_1, \dots, p_n, u)$$

$$h_i(p_1, \dots, p_n, u) = \frac{-\partial e(p_1, \dots, p_n, u)}{\partial p_i}$$

各関数の関係

$$h_i(\mathbf{p}, \underline{u}) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \underline{u})) \quad \forall i$$

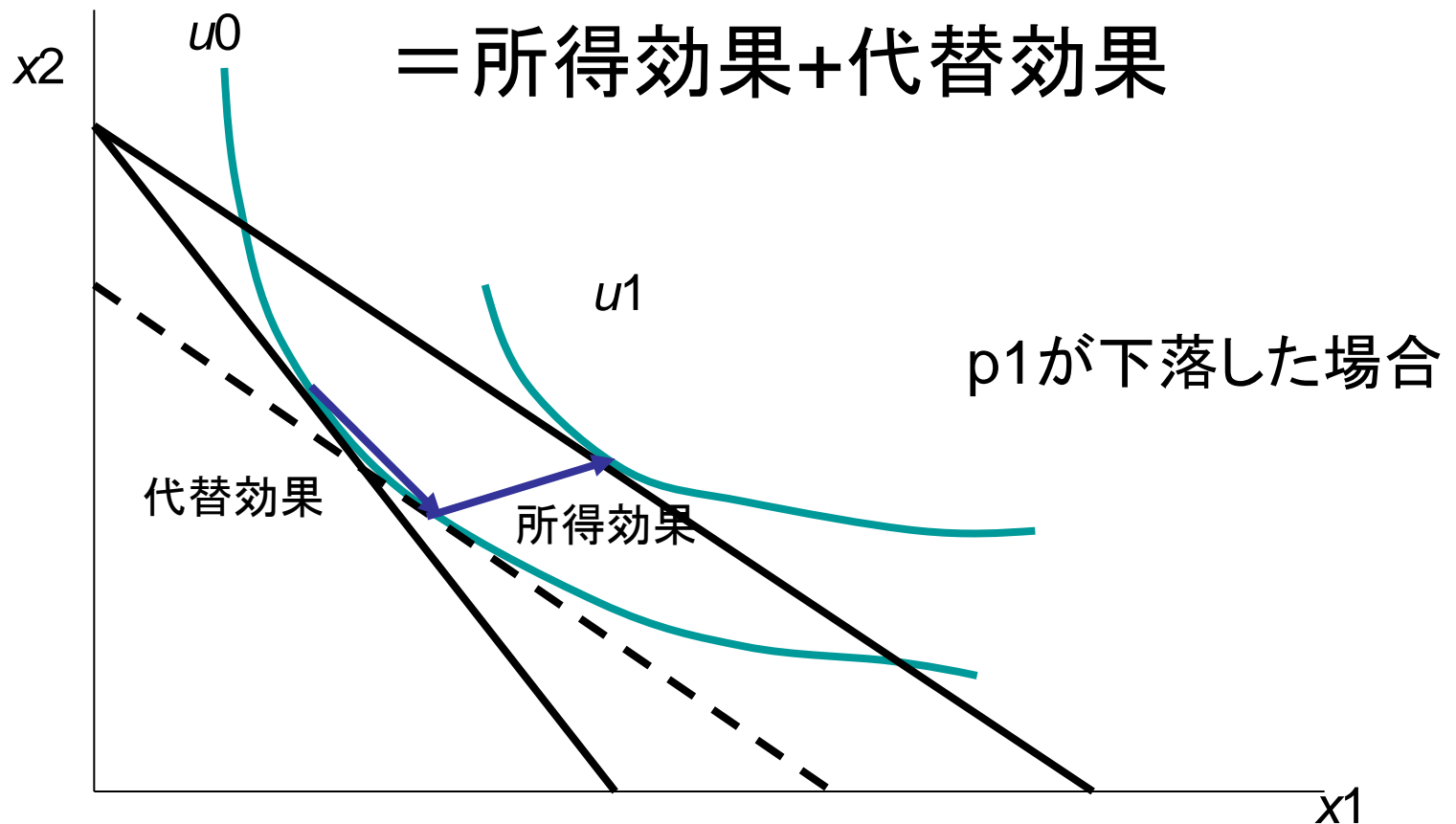
$$x_i(\mathbf{p}, I) = h_i(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) \quad \forall i$$

$$V(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \underline{u})) = \underline{u}$$

$$E(\mathbf{p}, V(\mathbf{p}, I)) = I$$

所得効果と代替効果

- 財の価格が変化したときの効果



スルツキー方程式

- 所得効果と代替効果の関係を示す方程式

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p}, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, I))}{\partial p_j} - x_j(\mathbf{p}, I) \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I}$$

代替効果
: 効用水準一定

所得効果

消費者余剰

- 便益の評価B →費用便益分析(B/Cなど)
- 消費者余剰
 - 「消費者が、その財なしですませるくらいなら支払ってもよいと考える最高支払許容額の和から、実際にその財の購入のために支払った金額の合計を差し引いたもの。」

消費者余剰

Tさんは新品の同じ真珠の指輪を3つ持っている。彼女の友達は、この指輪を手に入れるのに次の金額までなら支払ってもよいと思っている。さて、Tさんはいくらで売ればよいか？

Aさん: 13万円
Iさん: 2万円
Sさん: 7万円
Kさん: 10万円

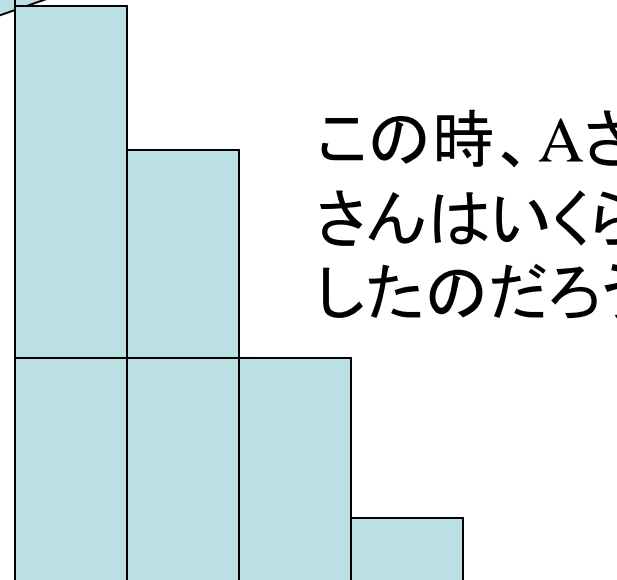
もちろん、7万円

この時、Aさん、Kさんはいくら得をしたのだろうか

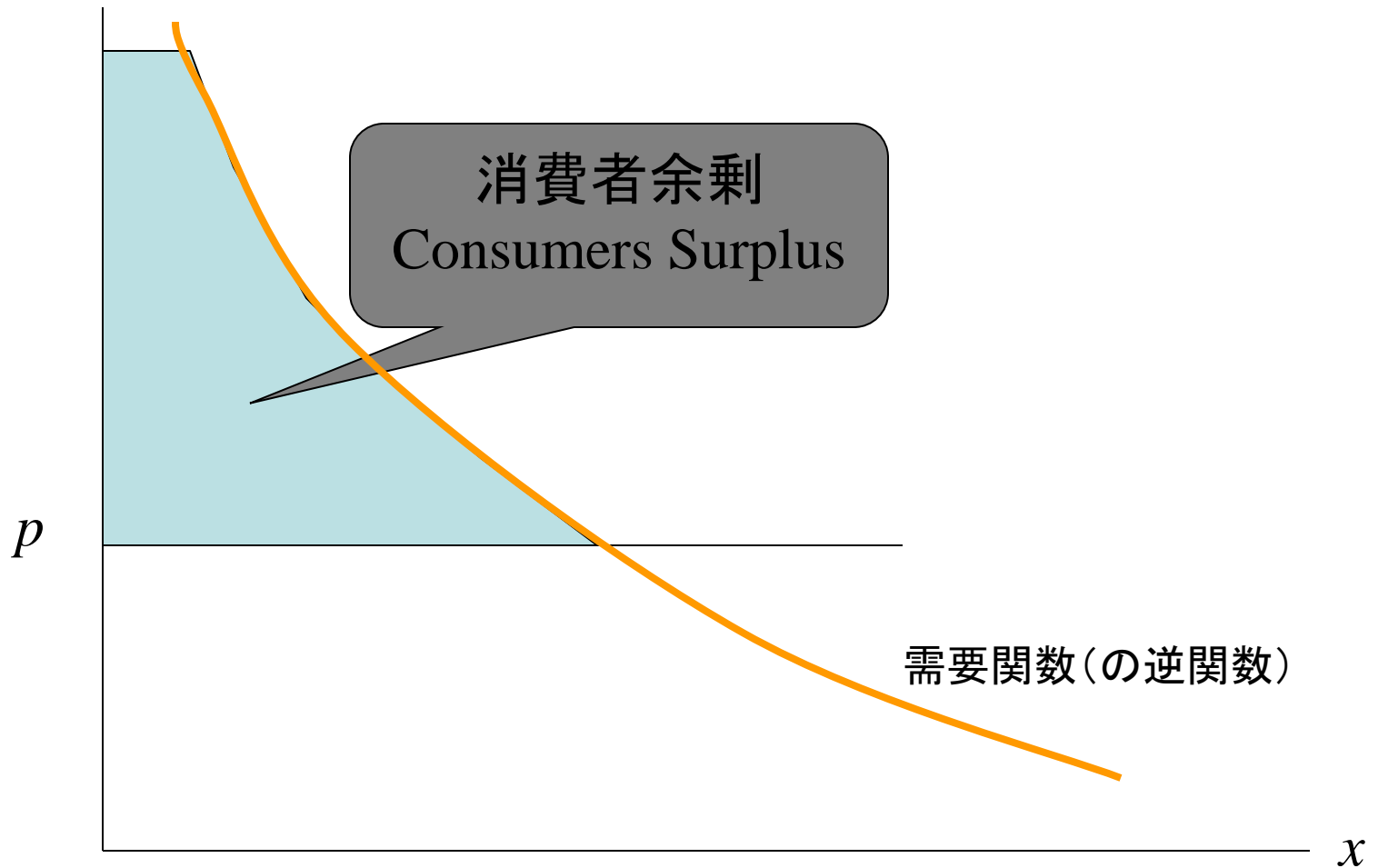
支払意思額の高い順
にならべると



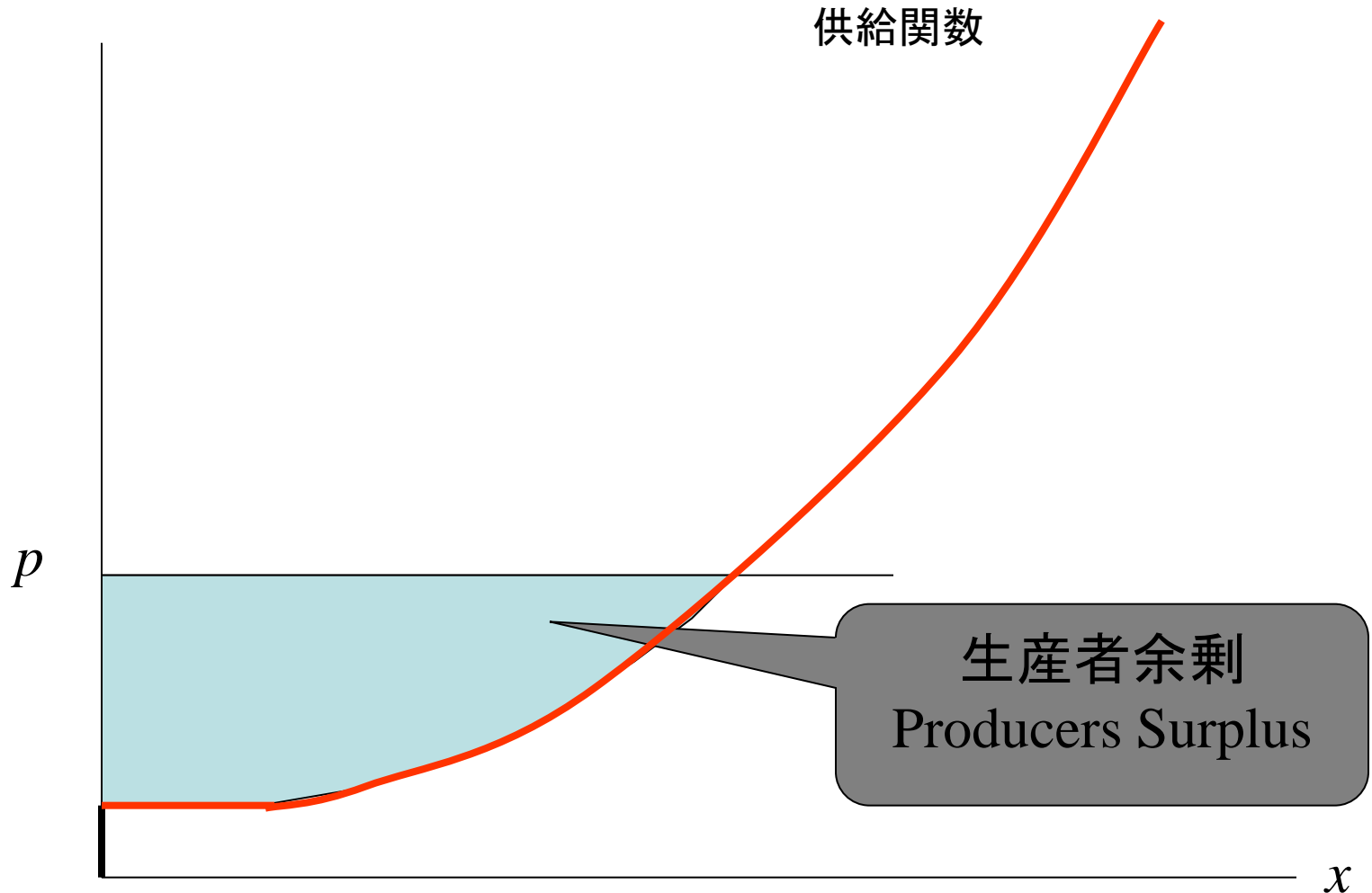
7



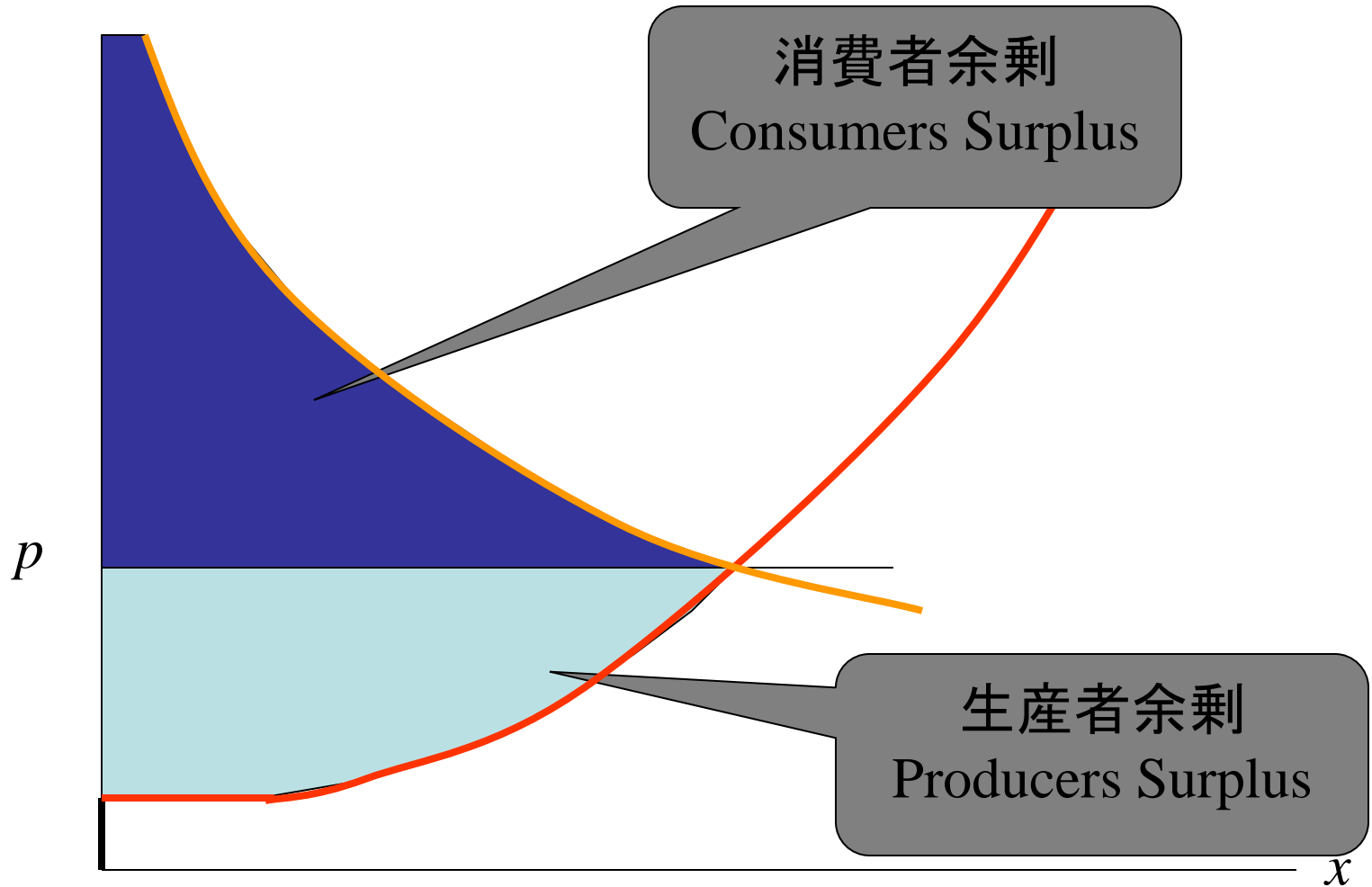
消費者余剰



参考：生産者余剰

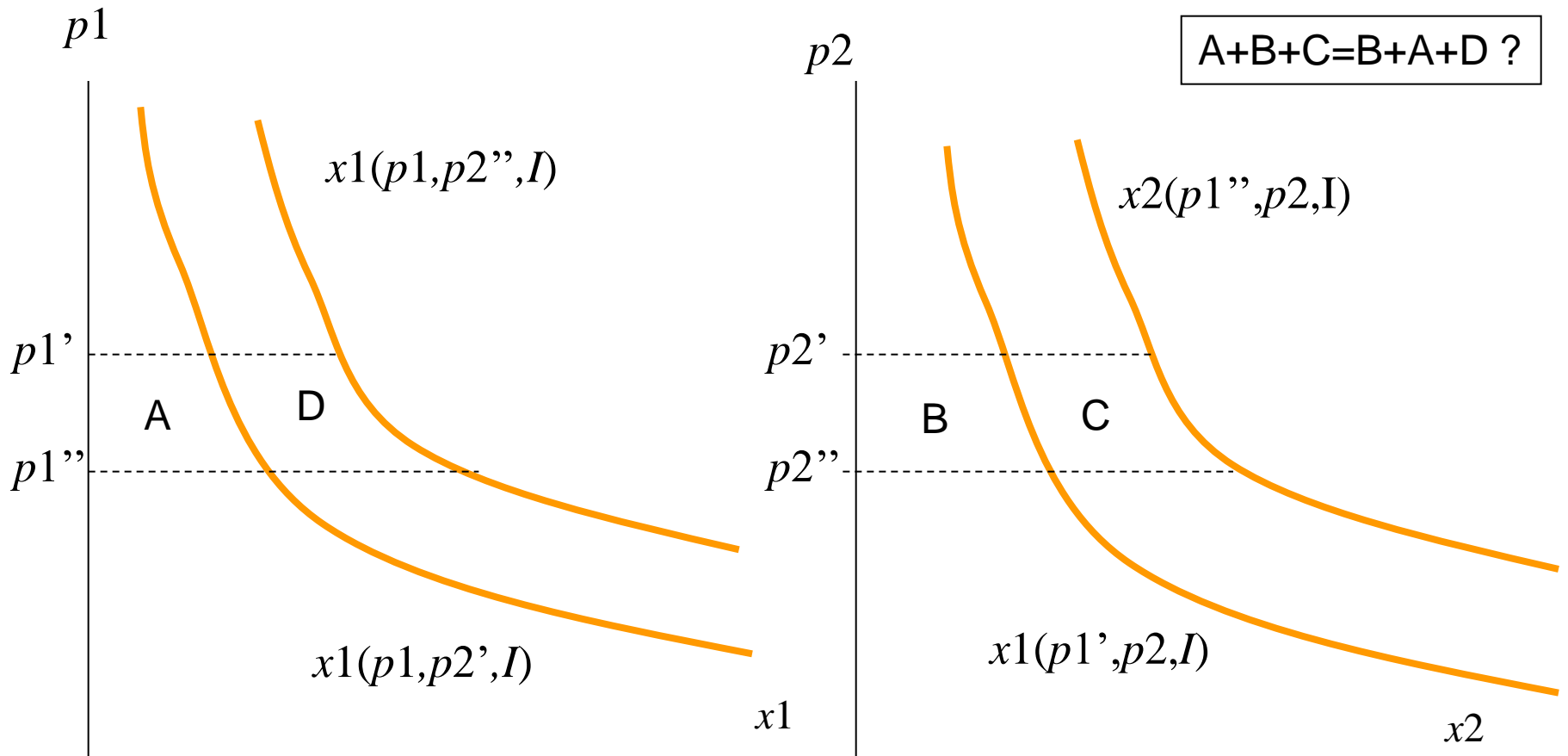


社会的余剰

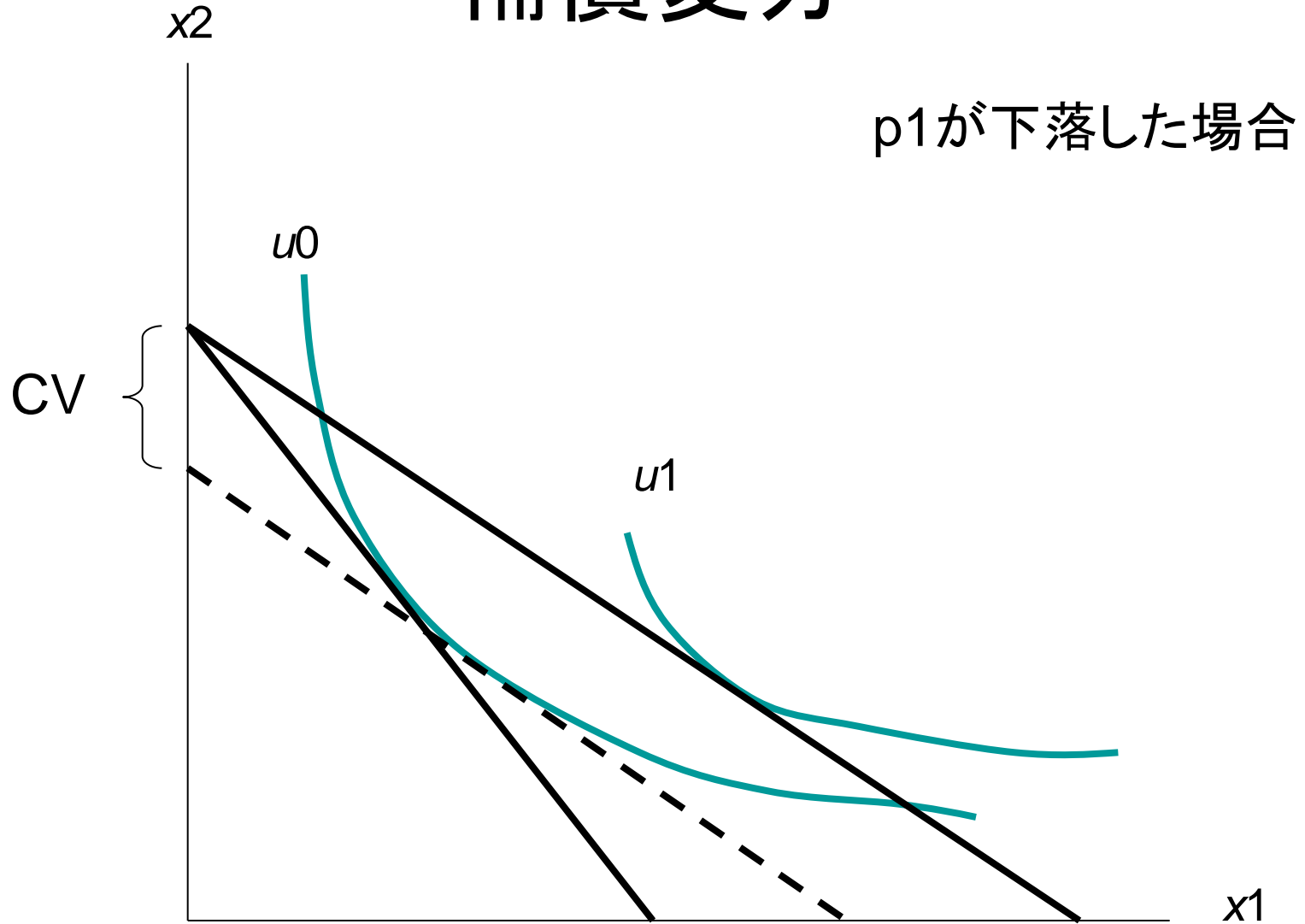


経路依存性問題

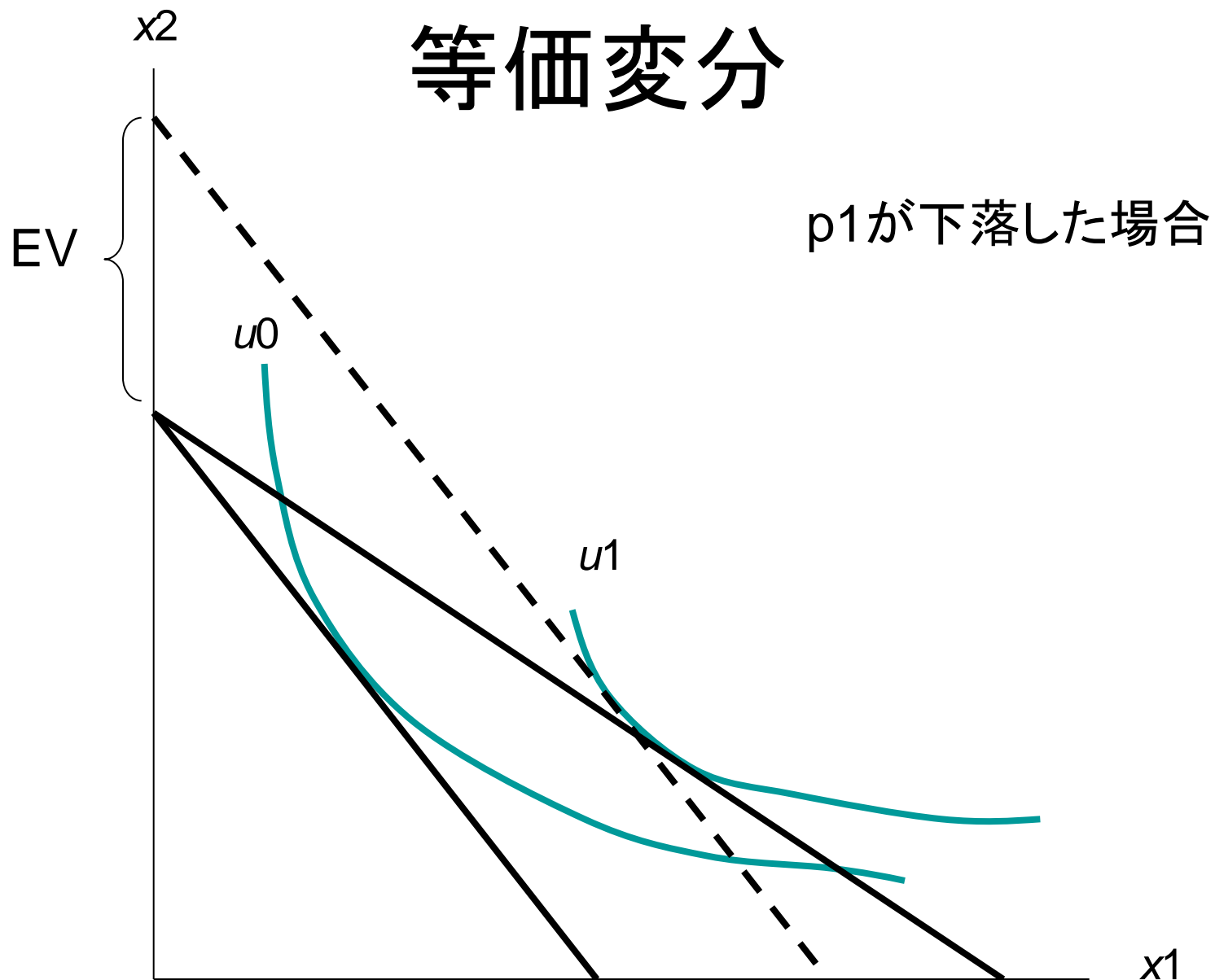
価格が $(p1', p2')$ から $(p1'', p2'')$ へ変化した場合



補償変分



等価変分



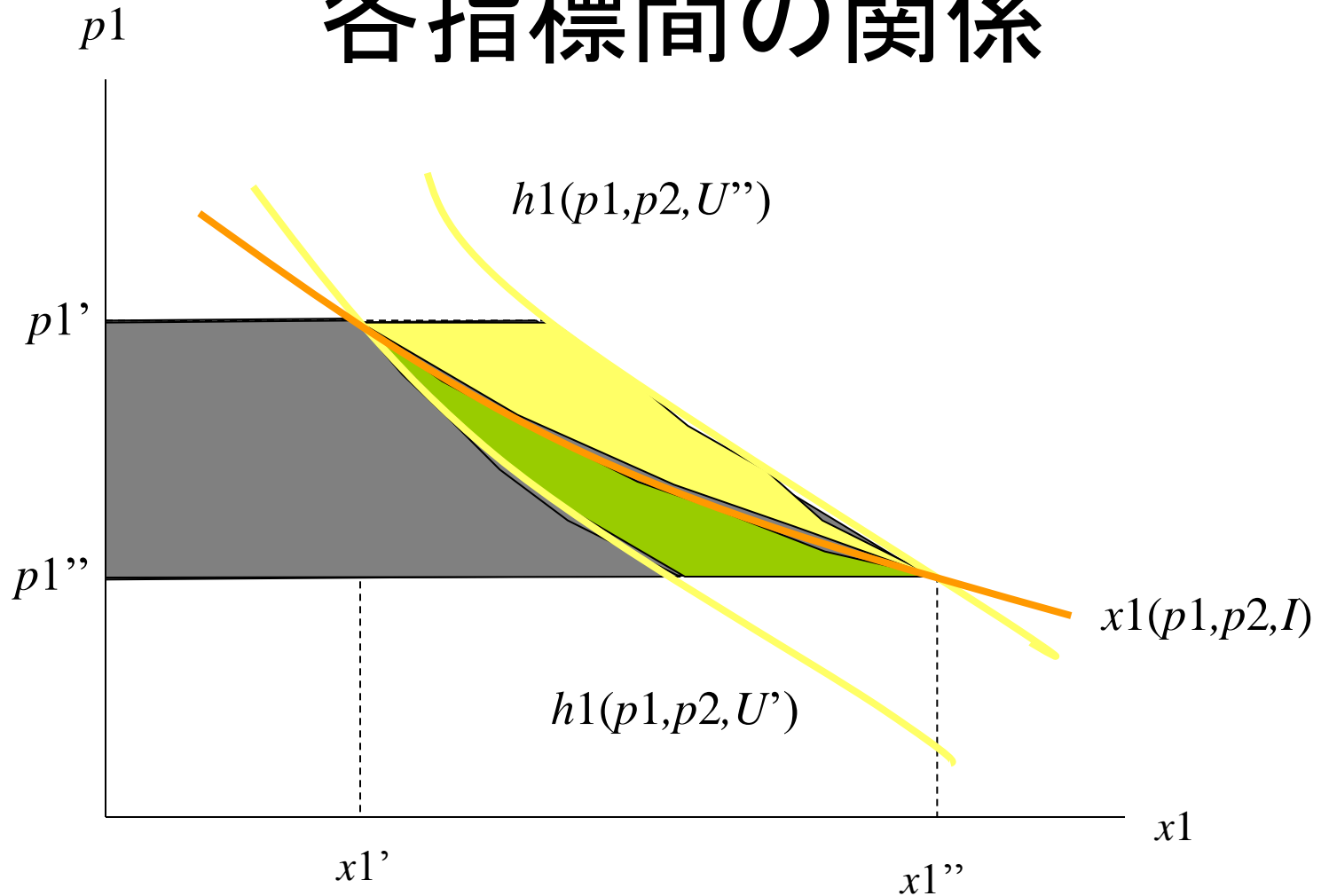
補償変分と等価変分

価格が (p_1', p_2') から (p_1'', p_2'') へ変化した場合

$$\begin{aligned} CV &= e(p_1', p_2', U') - e(p_1'', p_2'', U') \\ &= \int_c h(\mathbf{p}, U') d\mathbf{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EV &= e(p_1', p_2', U'') - e(p_1'', p_2'', U'') \\ &= \int_c h(\mathbf{p}, U'') d\mathbf{p} \end{aligned}$$

各指標間の関係



経路独立 → 所得効果=0 → 効用関数が準線形